Programme de colles 12
Applications linéaires

Quinzaine du 08 avril au 03 mai

Applications linéaires

1. Définition par l'image d'une combinaison linéaire de deux vecteurs. Extension aux combinaisons de n vecteurs, cas particulier de la somme et de la multiplication externe.
2. Définition de l'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$, vocabulaire : endomorphisme, forme linéaire, automorphisme, isomorphisme.
3. Image de 0, restriction à un sous-espace vectoriel, somme et composition d'applications linéaires, notation f^n.
4. $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. La composition d'applications linéaires est une application linaire. L'inverse d'une application linéaire est une application linéaire. Cas d'endomorphismes commutant (formule de Leibniz et de Bernoulli).
5. Noyau et Image. Définition. Ce sont des sous-espaces vectoriels. Généralisation l'image directe et l'image réciproque de sous-espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels.
6. Projecteur et symétrie. Définition et caractérisation par $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Détermination des espaces caractéristiques.
7. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image.
8. Image d'un sous-espace engendré et écriture de $\mathrm{Im}(f)$ à l'aide une famille génératrice de E.
9. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre et l'image d'une famille génératrice par une application surjective est génératrice.
10. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire à l'aide de l'image d'une base.
11. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
12. Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des espaces supplémentaires.
13. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Lorsque f est injective/surjective/bijective comparaison des dimensions de E et F.
14. Tous les espaces isomorphes sont de même dimension et tous les espaces de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$.
15. Définition du rang. Théorème du rang. Lorsque $\dim(E) = \dim(F)$, f est injective si et seulement f est surjective si et seulement si f est bijective.
16. Ensemble des solutions d'une équation $f(x) = b$ où $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$.

Questions de cours

1. Démontrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que l'image d'une base est libre si et seulement si l'application est injective.
3. Le théorème du rang sans les cas particuliers où $n = 0$ ou $p = 0$.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, A un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors, l'ensemble image $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Montrons que $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ est un sous-ensemble vectoriel de F.

- Par définition, $f(A) \subseteq F$.
- Puisque A est un sous-espace vectoriel de E, $0_E \in A$. De plus, f est linéaire donc $0_F = f(0_E) \in f(A)$.
- Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(y_1, y_2) \in f(A)^2$. Montrons que $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ appartient à $f(A)$. Puisque $y_1 \in f(A)$, il existe $x_1 \in A$ tel que $f(x_1) = y_1$. De même, $y_2 \in f(A)$ donc il existe $x_2 \in A$ tel que $f(x_2) = y_2$. Par suite,
$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$
Posant $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Comme A est un espace vectoriel, $x \in A$ et on observe que $y = f(x) \in f(A)$ i.e. $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(A)$ et l'ensemble $\operatorname{Im}(f)$ est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, l'ensemble $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Proposition (démo 2)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, F un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.

Démonstration. Supposons f injective. Montrons que $f(\mathscr{B})$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0_F \qquad \Leftrightarrow \qquad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0_F \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$
Donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \operatorname{Ker}(f)$. Or f est injective donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E.$$
Or $\mathscr{B}$ est libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. Donc $f(\mathscr{B})$ est libre.
Réciproquement, supposons que $f(\mathscr{B})$ est libre et montrons que f est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Notamment $x \in E$. Or $\mathscr{B}$ est une base de E, donc il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (coordonnées de x dans $\mathscr{B}$) tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Puisque $x \in \operatorname{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0_F$. Puis par linéarité de f, on obtient que
$$0_F = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k).$$
Or la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre. Donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. D'où $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$ i.e. l'application f est injective. □

Proposition (démo 3 - Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie. Alors
$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E).$$

Démonstration. Soient $n = \dim(E)$ et $p = \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Supposons que $n > p > 0$. Soit $\mathscr{B}_K = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$, G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathscr{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G (tous ces objets existent car E de dimension finie). Par le théorème de la base adaptée, $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_K, \mathscr{B}_G)$ est une base de E. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) \\
&= \mathrm{Vect}(0_F, \ldots, 0_F, f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) && \text{car pour tout } i \in [\![1;p]\!],\ e_i \in \mathrm{Ker}(f) \\
&= \mathrm{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)).
\end{aligned}$$

Montrons que $f(\mathscr{B}_G) = (f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre. Soit $(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, f(e_i) = 0_F.$$

Par linéarité,

$$f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i\right) = 0_F \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i \in \mathrm{Ker}(f).$$

Notons $x = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i$. On a donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$. D'autre part, $x \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n) = G$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap G$. Or $\mathrm{Ker}(f)$ et G sont en somme directe. Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap G = \{0_E\}$ et $x = 0_E$. Par suite,

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0_E.$$

Or $\mathscr{B}_G$ est libre donc $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. On obtient donc que $f(\mathscr{B}_G)$ est libre. De plus, elle engendre $\mathrm{Im}(f)$ et constitue donc une base de $\mathrm{Im}(f)$. Par conséquent,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Card}(f(\mathscr{B}_G)) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_G) = n - p.$$

Finalement, on obtient bien que

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - p = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

□