Correction du Devoir Maison 8
Séries, espaces vectoriels, dimension

Du jeudi 28 mars

Problème I - Séries

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \gamma_n = H_n - \ln(n).$$

Partie 1 : Alors l'Harmonie s'étendra jusqu'à l'infini

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} - \gamma_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Or on sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + o(u)$. Donc en posant $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} - \gamma_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.}$$

2. On observe les points suivants :

- Par la question précédente, $\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2n^2} < 0$.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

Conclusion, par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \text{ converge.}}$$

3. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)$ est une série télescopique donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(\gamma_{k+1}-\gamma_k)=\gamma_{n+1}-\gamma_1=\gamma_{n+1}-H_1+\ln(1)=\gamma_{n+1}-1.$$

Par la question précédente, la suite des sommes partielles, $\left(\sum_{k=1}^{n}(\gamma_{k+1}-\gamma_k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et par définition sa limite est $\sum_{k=1}^{+\infty}(\gamma_{k+1}-\gamma_k)$. On en déduit donc que

$$\boxed{(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ converge.}}$$

De plus

$$\gamma=\lim_{n\to+\infty}\gamma_n=\sum_{k=1}^{+\infty}(\gamma_{k+1}-\gamma_k)+1.$$

4. Par définition de γ, on a $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma+o(1)$ i.e.

$$H_n-\ln(n)\underset{n\to+\infty}{=}\gamma+o(1)$$

ou encore

$$\boxed{H_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+o(1)\,.}$$

Partie 2 : Quand le discret pour continuer sur l'ordre suivant se fait discrètement aider par le continu

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n=\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\qquad\text{et}\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right).$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=H_n-\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))\,.$$

On reconnait alors dans la seconde somme, une somme télescopique. Donc

$$S_n=H_n-(\ln(n+1)-\ln(1))\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=H_n-\ln(n+1)\,.}$$

6. De la question précédente, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$S_n=H_n-\ln(n)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=H_n-\ln(n)-\frac{1}{n}=\gamma_n-\frac{1}{n}.$$

Donc d'après la question 3., on obtient par définition de γ,

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\gamma-0.$$

Autrement dit, $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n}$ converge et de plus

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=\gamma.}$$

7. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{\frac{x-(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x^2}\frac{x-x-1}{x+1} = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{x+1}.$$

En particulier pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ et donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or on a

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x) = \frac{1 + x\ln(x)}{x} - \ln(1+x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$$

et de plus

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion,

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$ 0

8. Soit $(a,b) \in]0;+\infty[^2$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{1}{t} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \frac{1}{t} - \ln(t+1) + \ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [\ln(t) + t\ln(t) - t]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \ln(t+1)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

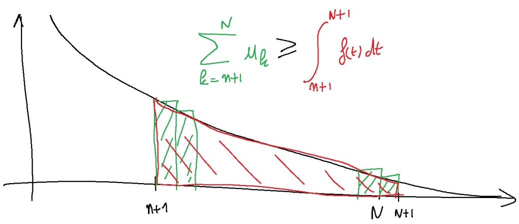
Par le changement de variable $s = t+1$, on obtient

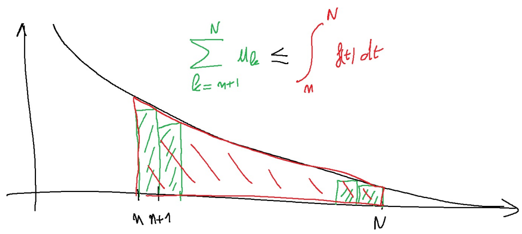
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= (b+1)\ln(b) - b - (a+1)\ln(a) + a - \int_{a+1}^{b+1} \ln(s)\,\mathrm{d}s\\ &= (b+1)\ln(b) - b - (a+1)\ln(a) + a - [s\ln(s) - s]_{s=a+1}^{s=b+1}\\ &= (b+1)\ln(b) - b - (a+1)\ln(a) + a - (b+1)\ln(b+1) + b + 1\\ &\qquad + (a+1)\ln(a+1) - a - 1.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b+1)\ln\left(\frac{b}{b+1}\right) - (a+1)\ln\left(\frac{a}{a+1}\right).}$$

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant N$. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 7. donc sur $[n; N+1]$. Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=n+1}^{N} f(k)$. Donc par le théorème de comparaison série-intégrale (un dessin !),





$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \int_{n}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc à l'aide du calcul de la question précédente en prenant d'une part $a = n+1$ et $b = N+1$ et d'autre part $a = n$ et $b = N$, on obtient que, pour tout $N \geqslant n$,

$$\boxed{(N+2)\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) - (n+2)\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant (N+1)\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) - (n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).}$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_k$.

10. Par définition, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$. Posons pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $a_N = (N+1)\ln\left(\frac{N}{N+1}\right)$.

    On a

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N}, \qquad a_N &= (N+1)\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{N}}\right)\\
&= (N+1)\ln\left(1 - \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\\
&= (N+1)\left(-\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\\
&= -1 + o(1).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{N\to+\infty} (N+1)\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} a_N = -1$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} (N+2)\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) = \lim_{N\to+\infty} a_{N+1} = -1.$$

Donc par passage à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 - (n+2)\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leqslant R_n \leqslant -1 - (n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (n+2)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1 \leqslant R_n \leqslant (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.}$$

11. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
b_n &\underset{n\to+\infty}{=} (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

De plus, on en déduit également que

$$b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Donc

$$b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Or par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} \leqslant R_n \leqslant b_n$. Donc par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

12. Par propriété du reste d'une série convergente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Donc d'après la question 6., et la définition de S_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n = \gamma - S_n.$$

Donc par la question 5.,

$$R_n = \gamma - H_n + \ln(n+1).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
H_n &= \ln(n+1) + \gamma - R_n \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Problème II - Espaces vectoriels et dimension

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble

$$\mathscr{E}_n = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, M^T M = M M^T \right\}.$$

Partie 1 : L'identité d'une diagonale est d'être symétrique

1. On observe les points suivants :
   - $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
   - Si $M = 0_n$, alors $M^T = 0_n = M$. Donc $0_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$. Posons $T = \lambda M + \mu N$. Alors par linéarité de la transposée,

   $$T^T = (\lambda M + \mu N)^T = \lambda M^T + \mu N^T = \lambda M + \mu N \qquad \text{car } M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } N \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$

   Donc $T^T = T$ et ainsi $T \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc

   $$\boxed{\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

   On admet de même que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2. On a
   - Soit $D = (d_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$,

   $$d_{ji} = 0 = d_{ij}.$$

   Donc $D \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathscr{D}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   - Si $D = 0_n$ alors D est bien diagonale. Donc $0_n \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$.
   - Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Posons $C = \lambda A + \mu B = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$,

   $$c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij} = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0.$$

   Donc $C \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,
   $$\boxed{\mathscr{D}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$

Partie 2 : Les antisymétriques ripostent et proposent une coalition

On suppose dans toute cette partie que $n = 2$.

3. (a) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Par ce qui précède, $\mathscr{B}_1$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathscr{B}_1$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 0_2 \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0 \qquad \text{par unicité des coefficients d'une matrice.}$$

Donc $\mathscr{B}_1$ est libre. Or $\mathscr{B}_1$ est génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } \mathscr{S}_2(\mathbb{R})}$$

et ainsi,

$$\boxed{\dim(\mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_1) = 3.}$$

(b) De même, on a

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Par ce qui précède, $\mathscr{B}_2$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$. De plus $\mathscr{B}_2$ est constituée d'une seule matrice non nulle donc $\mathscr{B}_2$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_2 \text{ est une base de } \mathscr{A}_2(\mathbb{R})}$$

et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ est une droite vectorielle :

$$\boxed{\dim(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_2) = 1.}$$

(c) Enfin,

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Par ce qui précède, $\mathscr{B}_3$ est une famille génératrice de $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$. De plus $\mathscr{B}_3$ est constituée de deux matrices non colinéaires donc $\mathscr{B}_3$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_3 \text{ est une base de } \mathscr{D}_2(\mathbb{R})}$$

et

$$\boxed{\dim(\mathscr{D}_2(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_3) = 2.}$$

4. Appliquons le théorème de la base adaptée. On sait que $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$. Posons

$$\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. *Méthode 1.* Calculons le rang de $\mathscr{B}$. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{B}) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). && C_4 \leftarrow \frac{C_2 - C_4}{2} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) && C_2 \leftarrow C_2 - C_4 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) && C_3 \leftrightarrow C_4.
\end{aligned}$$

On reconnaît la base canonique. Donc $\mathrm{rg}(\mathscr{B}) = 4$. Ainsi, $\mathrm{rg}(\mathscr{B}) = \mathrm{Card}(\mathscr{B})$ donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\mathrm{rg}(\mathscr{B}) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Méthode 2. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} a & b+d \\ b-d & c \end{pmatrix} = 0_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b+d = 0 \\ b-d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b+d = 0 \\ -2d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

D'où $a = b = c = d = 0$. Donc $\mathscr{B}$ est libre. Or $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi,

- $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$,
- $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$,
- $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\text{les espaces } \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

5. On peut utiliser la base adaptée en montrant que $\mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$ était libre. Procédons ici par l'intersection. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \\ M \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = c = 0 \\ a = d = 0 \text{ et } c = -d \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad M = 0_2.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \{0_2\}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ sont en somme directe.}}$$

Cependant, par ce qui précède, on note que $\dim(\mathscr{D}_2(\mathbb{R})) + \dim(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})) = 2 + 1 = 3 \neq 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

« La dimension, c'est béton. »

On pose

$$\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 3a - 2b - 2c - 3d = 0 \\ 4a + 3b + 3c - 4d = 0 \end{array} \right\}.$$

On admet que $\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

6. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3a - 2b - 2c - 3d = 0 \\ 4a + 3b + 3c - 4d = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 5b + 5c - d = 0 \\ 4a + 3b + 3c - 4d = 0 \end{cases} && L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a + 5b + 5c - d = 0 \\ -17b - 17c = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a - d = 0 \\ c = -b. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ c = -b. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Les deux matrices de $\mathscr{B}_4$ étant non colinéaires, la famille $\mathscr{B}_4$ est libre. Par ce qui précède elle engendre aussi $\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_4 \text{ est une base de } \mathscr{A}_2^+(\mathbb{R}).}$$

De plus I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont deux matrices non nulles et forment donc une base de $\operatorname{Vect}(I_2)$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ respectivement. Donc par le théorème de la base adaptée, on en déduit que

$$\boxed{\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R}) = \operatorname{Vect}(I_2) \oplus \mathscr{A}_2(\mathbb{R}).}$$

7. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{E}_2 \quad & \Leftrightarrow \quad M^T M = M M^T \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2+c^2 = a^2+b^2 \\ ab+cd = ac+bd \\ ab+cd = ac+bd \\ b^2+d^2 = c^2+d^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c^2 = b^2 \\ ab+cd = ac+bd \\ b^2 = c^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Premier cas, $b = c$, alors $ab + cd = ac + bd$ et donc $M \in \mathscr{E}_2$.
Second cas, $b = -c$, alors

$$M \in \mathscr{E}_2 \quad \Leftrightarrow \quad -ac + cd = ac - cd \quad \Leftrightarrow \quad 0 = ac - cd = c(a-d).$$

Si $c = 0$, alors $b = -c = 0$ et on retrouve le premier cas. Si $c \neq 0$, alors $a - d = 0$ i.e. $a = d$.
Conclusion,

$$\boxed{M \in \mathscr{E}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (b = c) \quad \text{OU} \quad (b = -c \text{ et } a = d).}$$

(b) D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; b = c \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; b = -c \text{ et } a = d \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E}_2 = \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathscr{A}_2^+(\mathbb{R}).}$$

8. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Posons $C = A + B$. On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$C^T C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$C C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $C^T C \neq C C^T$ et donc

$$\boxed{C = A + B \notin \mathscr{E}_2.}$$

(b) On a $A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et par la question 7.b $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{E}_2$. Donc $A \in \mathscr{E}_2$. De même, $B \in \mathscr{A}_2^+(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{E}_2$. Or $A + B \notin \mathscr{E}_2$. Donc $\mathscr{E}_2$ n'est pas stable par somme. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E}_2 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Partie 3 : Pour qui sont ces S qui commutent sur nos têtes ?

On suppose dans toute cette partie que $n = 3$ et on pose

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. On a

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$S^3 = S^2 \times S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S^3 = -I_3.}$$

10. On pose $\mathscr{F} = \left(I_3, S, S^2, S^3, S^4, S^5, S^6\right)$.

(a) Par la question précédente, on a $S^4 = S^3 \times S = -I_3 \times S = -S$, puis $S^5 = -S^2$ et $S^6 = -S^3 = I_3$. Donc, les matrices S^3, S^4, S^5, S^6, sont colinéaires à I_3, S, S^2 et I_3 respectivement. Donc

$$\mathrm{rg}\left(\mathscr{F}\right) = \mathrm{rg}\left(I_3, S, S^2\right).$$

Posons $\mathscr{F}' = \left(I_3, S, S^2\right)$. Montrons que $\mathscr{F}'$ est libre. Soient $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_0\, I_3 + \lambda_1\, S + \lambda_2\, S^2 = 0_3.$$

Alors

$$0_3 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Donc par unicité des coefficients d'une matrice, on en déduit que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $\mathscr{F}'$ est libre. Donc

$$\mathrm{rg}\left(\mathscr{F}'\right) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{F}'\right) = 3.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}\left(\mathscr{F}\right) = 3.}$$

(b) Puisque $\mathrm{rg}\left(\mathscr{F}\right) = 3 \neq 5 = \mathrm{Card}\left(\mathscr{F}\right)$, on en déduit que $\mathscr{F}$ n'est pas libre. Puisque $\mathrm{rg}\left(\mathscr{F}\right) = 3 \neq 9 = \dim\left(\mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right)\right)$, on en déduit que $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice dans $\mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ n'est ni libre ni génératrice dans } \mathscr{M}_3\left(\mathbb{R}\right).}$$

11. On pose $F = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{F}\right)$. Puisque S^3, S^4, S^5, S^6 sont colinéaires à I_3, S, S^2 et I_3 respectivement, on en déduit que

$$F = \mathrm{Vect}\left(I_3, S, S^2\right).$$

Toujours avec la notation $\mathscr{F}' = \left(I_3, S, S^2\right)$, on a donc $\mathscr{F}'$ génératrice dans F. De plus, nous avons vu dans la question précédente que $\mathscr{F}'$ est libre donc

$$\boxed{\mathscr{F}' = \left(I_3, S, S^2\right) \text{ est une base de } F}$$

et donc

$$\boxed{\dim\left(F\right) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{F}'\right) = 3.}$$

12. Soient $(A,B)\in F^2$. Puisque $F=\mathrm{Vect}\left(I_3,S,S^2\right)$. il existe $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^3$ et $(\mu_0,\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^3$ tels que
$$A=\lambda_0\,I_3+\lambda_1\,S+\lambda_2\,S^2\qquad\text{et}\qquad B=\mu_0 I_3+\mu_1 S+\mu_2 S^2$$
Alors,
$$\begin{aligned}AB&=\left(\lambda_0\,I_3+\lambda_1\,S+\lambda_2\,S^2\right)\left(\mu_0 I_3+\mu_1 S+\mu_2 S^2\right)\\&=\lambda_0\,\mu_0 I_3+\lambda_0\,\mu_1 S+\lambda_0\,\mu_2 S^2+\lambda_1\,\mu_0 S+\lambda_1\,\mu_1 S^2+\lambda_1\,\mu_2 S^3+\lambda_2\,\mu_0 S^2+\lambda_2\,\mu_1 S^3+\lambda_2\,\mu_2 S^4\\&=\lambda_0\,\mu_0 I_3+\lambda_0\,\mu_1 S+\lambda_0\,\mu_2 S^2+\lambda_1\,\mu_0 S+\lambda_1\,\mu_1 S^2-\lambda_1\,\mu_2 I_3+\lambda_2\,\mu_0 S^2-\lambda_2\,\mu_1 I_3-\lambda_2\,\mu_2 S\\&=\underbrace{(\lambda_0\,\mu_0-\lambda_1\,\mu_2-\lambda_2\,\mu_1 I_3)}_{=\gamma_0}I_3+\underbrace{(\lambda_0\,\mu_1+\lambda_1\,\mu_0-\lambda_2\,\mu_2)}_{\gamma_1}S+\underbrace{(\lambda_0\,\mu_2+\lambda_1\,\mu_1+\lambda_2\,\mu_0)}_{=\gamma_2}S^2\\&=\gamma_0 I_3+\gamma_1 S+\gamma_2 S^2\in\mathrm{Vect}\left(I_3,S,S^2\right)\end{aligned}$$
Donc $AB\in F$. Conclusion,
$$\boxed{F\text{ est stable par produit.}}$$

13. On observe que $S^T=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=-S^2$. Donc
$$S^TS=-S^2\times S=-S^3=I_3\qquad\text{et}\qquad SS^T=-S^3=I_3.$$
Donc $S^TS=SS^T$ et $S\in\mathscr{E}_3$. De plus, $\left(S^2\right)^T=\left(S^T\right)^2=\left(-S^2\right)^2=S^4=-S$. Donc
$$\left(S^2\right)^TS^2=-SS^2=-S^3=I_3\qquad\text{et}\qquad S^2\left(S^2\right)^T=-S^3=I_3.$$
Donc $\left(S^2\right)^TS^2=S^2\left(S^2\right)^T$ et $S^2\in\mathscr{E}_3$. Conclusion,
$$\boxed{S\in\mathscr{E}_3\qquad\text{et}\qquad S^2\in\mathscr{E}_3.}$$

14. On note
$$\mathcal{C}(S)=\left\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\mid SM=MS\right\}.$$
   (a) On observe les points suivants :
   - $\mathcal{C}(S)\subseteq\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.
   - Si $M=0_3$, alors $SM=0_3=MS$. Donc $0_3\in\mathcal{C}(S)$.
   - Soient $(M,N)\in\mathcal{C}(S)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Posons $T=\lambda\,M+\mu N$. Alors,
$$\begin{aligned}ST=S\,(\lambda\,M+\mu N)=\lambda\,SM+\mu SN&\\&=\lambda\,MS+\mu NS&&\text{car }M\in\mathcal{C}(S)\text{ et }N\in\mathcal{C}(S)\\&=(\lambda\,M+\mu N)\,S\\&=TS.\end{aligned}$$
     Donc $T\in\mathcal{C}(S)$ et $\mathcal{C}(S)$ est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion, $\mathcal{C}(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donc
$$\boxed{\mathcal{C}(S)\text{ est un espace vectoriel.}}$$

   (b) On a $I_3S=S=SI_3$. Donc $I_3\in\mathcal{C}(S)$. Puis, $SS=S^2=SS$ donc $S\in\mathcal{C}(S)$. Enfin, $S^2S=S^3=SS^2$. Donc $S^2\in\mathcal{C}(S)$. Donc $\mathscr{F}'=\left(I_3,S,S^2\right)$ est une famille de $\mathcal{C}(S)$. Or $\mathcal{C}(S)$ est un espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}\left(\mathscr{F}'\right)\subseteq\mathcal{C}(S)$. Par la question 11. $\mathrm{Vect}\left(\mathscr{F}'\right)=F$. Conclusion,
$$\boxed{F\subseteq\mathcal{C}(S).}$$

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C}(S) \quad & \Leftrightarrow \quad MS = SM \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -a_3 & a_1 & a_2 \\ -a_6 & a_4 & a_5 \\ -a_9 & a_7 & a_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_4 = -a_3 \\ a_5 = a_1 \\ a_6 = a_2 \\ a_7 = -a_6 = -a_2 \\ a_8 = a_4 = -a_3 \\ a_9 = a_5 = a_1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_3 & a_1 & a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad M = a_1 I_3 + a_2 S + a_3 S^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $M \in \operatorname{Vect}\left(I_3, S, S^2\right) = F$. Donc

$$\boxed{M \in \mathcal{C}(S) \quad \Rightarrow \quad M \in F.}$$

Ceci étant vrai pour $M \in \mathcal{C}(S)$ quelconque, on en déduit que $\mathcal{C}(S) \subseteq F$. Or par la question précédente, on a $F \subseteq \mathcal{C}(S)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{C}(S) = F.}$$

Partie 4 : Vers l'infini et au-delà !

On se place dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout fonction $f \in E$, on note

$$\begin{aligned} f^T : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(-x) \end{aligned}$$

On considère les ensembles suivants :

- $\mathscr{E} = \left\{ f \in E \;\middle|\; f^T \circ f = f \circ f^T \right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{ f \in E \;\middle|\; f^T = f \right\}$ l'ensemble des fonctions paires.
- $\mathscr{A} = \left\{ f \in E \;\middle|\; f^T = -f \right\}$ l'ensemble des fonctions impaires.
- $\mathscr{D} = \operatorname{Vect}(\mathrm{Id})$.
- $\mathscr{H} = \{ f \in E \mid f(1) = 0 \}$

15. Montrons que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de E.

    - Par définition, $\mathscr{H} \subseteq E$.

- Si $f = 0_E$ est la fonction nulle, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ et en particulier $f(1) = 0$. Donc $0_E \in \mathscr{H}$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathscr{H}^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Puisque $f(1) = 0$ et $g(1) = 0$ car $f \in \mathscr{H}$ et $g \in \mathscr{H}$, on a
$$h(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0_{\mathbb{R}}.$$
Donc $h \in \mathscr{H}$ et $\mathscr{H}$ est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de E et donc

$$\boxed{\mathscr{H} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

On admet dans la suite que $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{D}$ le sont également.

16. Pas de dimension finie ! Pas de base ! Nous revenons donc à la définition.

Analyse/unicité. Soit $f \in \mathscr{H} + \mathscr{D}$ alors il existe $g \in \mathscr{H}$ et $h \in \mathscr{D}$ telles que $f = g + h$. Puisque $h \in \mathscr{D} = \operatorname{Vect}(\mathrm{Id})$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda \,\mathrm{Id}$. Donc

$$f = g + \lambda \,\mathrm{Id} \qquad \text{i.e.} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = g(x) + \lambda x.$$

En particulier
$$f(1) = g(1) + \lambda\,.$$

Or $g \in \mathscr{H}$, donc $g(1) = 0$. Donc

$$\lambda = f(1) \qquad \text{et} \qquad g = f - \lambda \,\mathrm{Id} = f - f(1)\mathrm{Id}.$$

Donc $h = f(1)\mathrm{Id}$ et $g = f - f(1)\mathrm{Id}$ sont entièrement déterminées de façon unique par f. Donc lorsque la décomposition existe, elle est unique. Ainsi $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}$ sont en somme directe.

Synthèse/Existence. Soit $f \in E$. Posons $g = f - f(1)\mathrm{Id}$ et $h = f(1)\mathrm{Id}$. Alors

- $g + h = f - f(1)\mathrm{Id} + f(1)\mathrm{Id} = f$.
- $h = f(1)\mathrm{Id} \in \operatorname{Vect}(\mathrm{Id}) = \mathscr{D}$.
- $g(1) = f(1) - f(1)\mathrm{Id}(1) = f(1) - f(1) = 0$. Donc $g \in \mathscr{H}$.

Donc $f \in \mathscr{H} + \mathscr{D}$. D'où $E \subseteq \mathscr{H} + \mathscr{D}$. Or $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}$ sont des sous-espaces de E donc $\mathscr{H} + \mathscr{D} \subseteq E$ et ainsi $\mathscr{H} + \mathscr{D} = E$.

Conclusion, les espaces $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}$ sont supplémentaires dans E :

$$\boxed{E = \mathscr{H} \oplus \mathscr{D}.}$$

17. Montrons que $\mathscr{S} \cap \mathscr{D} = \{0_E\}$. Soit $f \in \mathscr{S} \cap \mathscr{D}$. Alors $f \in \mathscr{D}$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \,\mathrm{Id}$. D'autre part, $f \in \mathscr{S}$ et donc $f^T = f$ i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = f(x).$$

Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\lambda x = \lambda x.$$

Notamment pour $x = 1$, on a
$$-\lambda = \lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $f = 0_E$ et donc $\mathscr{S} \cap \mathscr{D} \subseteq \{0_E\}$. Or les ensembles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc $\{0_E\} \subseteq \mathscr{S} \cap \mathscr{D}$. Ainsi $\mathscr{S} \cap \mathscr{D} = \{0_E\}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} \text{ et } \mathscr{D} \text{ sont en somme directe.}}$$

On pose $\mathscr{A}^- = \mathscr{A} \cap \mathscr{H}$ et $\mathscr{S}^+ = \mathscr{S} \oplus \mathscr{D}$.

18. (a) Soit $f \in E$. Posons
$$g = \frac{f - f^T}{2} - \frac{f(1) - f^T(1)}{2}\mathrm{Id}.$$
Calculons,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(-x) &= \frac{f(-x) - f^T(-x)}{2} - \frac{f(1) - f^T(1)}{2}(-x)\\ &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} + \frac{f(1) - f^T(1)}{2}x\\ &= -\left[\frac{f(x) - f(-x)}{2} - \frac{f(1) - f^T(1)}{2}x\right]\\ &= -\left[\frac{f(x) - f^T(x)}{2} - \frac{f(1) - f^T(1)}{2}x\right]\\ &= -g(x).\end{aligned}$$
Par conséquent, g est impaire : $g^T = -g$. Donc $g \in \mathscr{A}$. De plus,
$$g(1) = \frac{f(1) - f^T(-1)}{2} - \frac{f(1) - f^T(1)}{2} = 0_{\mathbb{R}}.$$
Donc $g \in \mathscr{H}$. Conclusion,
$$\boxed{g = \frac{f - f^T}{2} - \frac{f(1) - f^T(1)}{2}\mathrm{Id} \in \mathscr{A} \cap \mathscr{H} = \mathscr{A}^-.}$$

(b) Avec les notations de la question précédente, pour $f \in E$, posons $g = \frac{f-f^T}{2} - \frac{f(1)-f^T(1)}{2}\mathrm{Id}$, puis $h = f - g$. Alors

- $f = g + h$
- $g \in \mathscr{A}^-$ d'après la question précédente.
- D'autre part,
$$h = f - g = f - \frac{f - f^T}{2} + \frac{f(1) - f^T(1)}{2}\mathrm{Id} = \frac{f + f^T}{2} + \frac{f(1) - f^T(1)}{2}\mathrm{Id}.$$
Posons $h_1 = \frac{f+f^T}{2}$ et $h_2 = \frac{f(1)-f^T(1)}{2}\mathrm{Id}$. Alors,
  - $h = h_1 + h_2$.
  - $h_2 \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}) = \mathscr{D}$.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h_1(-x) = \frac{f(-x) + f^T(-x)}{2} = \frac{f^T(x) + f(x)}{2} = h_1(x).$$
  Donc $h_1^T = h_1$ i.e. $h_1 \in \mathscr{S}$.

  Ainsi $h \in \mathscr{S} + \mathscr{D} = \mathscr{S}^+$.

Par ces différents points, on en déduit bien que
$$f = \underbrace{g}_{\in \mathscr{A}^-} + \underbrace{h}_{\in \mathscr{S}^+} \in \mathscr{A}^- + \mathscr{S}^+.$$
Or f étant quelconque dans E, on en déduit que $E \subseteq \mathscr{A}^- + \mathscr{S}^+$. Or $\mathscr{A}^-$ et $\mathscr{S}^+$ sont des sous-espaces vectoriels de E, donc $\mathscr{A}^- + \mathscr{S}^+ \subseteq E$. Conclusion,
$$\boxed{E = \mathscr{A}^- + \mathscr{S}^+.}$$

(c) Montrons maintenant que la somme est directe. Soit $f \in \mathscr{A}^- \cap \mathscr{S}^+$. Alors $f \in \mathscr{S} + \mathscr{D}$ implique qu'il existe $(g,h) \in \mathscr{S} \times \mathscr{D}$ tel que $f = g + h$. Par suite, $h \in \mathscr{D}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda\,\mathrm{Id}$. Ainsi

$$f = g + \lambda\,\mathrm{Id}.$$

De plus $f \in \mathscr{A}^- \subseteq \mathscr{A}$ et donc

$$f^T = -f \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = -f(x).$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) - \lambda\, x = -g(x) - \lambda\, x \qquad \Leftrightarrow \qquad g(-x) = -g(x).$$

Or $g \in \mathscr{S}$ donc on a aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = g(x)$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = -g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $g = 0_E$ et ainsi $f = \lambda\,\mathrm{Id} \in \mathscr{D}$. Cependant, n'oublions pas non plus que $f \in \mathscr{A}^- \subseteq \mathscr{H}$ et donc $f \in \mathscr{D} \cap \mathscr{H}$. Donc d'après la question 16., $f = 0_E$. Ainsi, on a $\mathscr{A}^- \cap \mathscr{S}^+ \subseteq \{0_E\}$. Réciproquement $\{0_E\} \subseteq \mathscr{A}^- \cap \mathscr{S}^+$ car les ensembles sont des sous-espaces vectoriels. Ainsi,

$$\mathscr{A}^- \cap \mathscr{S}^+ = \{0_E\}\,.$$

Or nous avions par la question précédente $E = \mathscr{A}^- + \mathscr{S}^+$. Conclusion, les espaces $\mathscr{A}^-$ et $\mathscr{S}^+$ sont supplémentaires dans E :

$$\boxed{E = \mathscr{A}^- \oplus \mathscr{S}^+.}$$

On admet/rappelle que $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = E$ (voir le chapitre 1, exemple 29, question 2)

19. Soit $f \in \mathscr{A}$, alors $f^T = -f$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^T \circ f(x) = f^T\left(f(x)\right) = f\left(-f(x)\right) = f\left(f(-x)\right) = f\left(f^T(x)\right) = f \circ f^T(x).$$

Donc $f^T \circ f = f \circ f^T$ et $f \in \mathscr{E}$. Ainsi

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{E}.$$

De même si $f \in \mathscr{S}$, alors $f^T = f$. Donc

$$f^T \circ f = f \circ f = f \circ f^T.$$

Donc $f \in \mathscr{E}$. Ainsi

$$\mathscr{S} \subseteq \mathscr{E}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{A} \bigcup \mathscr{S} \subseteq \mathscr{E}.}$$

20. Soit $f_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^x \end{array}$. Alors $f_0^T : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \end{array}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_0^T \circ f_0(x) = f_0^T\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}.$$

D'autre part,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_0 \circ f_0^T(x) = f_0\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}.$$

En particulier,

$$f_0^T \circ f_0(0) = \mathrm{e}^{-1} \neq \mathrm{e}^1 = f_0 \circ f_0^T(0).$$

Donc $f_0^T \circ f_0 \neq f_0 \circ f_0^T$. Conclusion,

$$\boxed{f_0 \notin \mathscr{E}.}$$

21. On en déduit de la question précédente que $\mathscr{E} \neq E$. Procédons par l'absurde. Supposons que $\mathscr{E}$ soit un espace vectoriel. Soit $f \in E$. D'après le rappel, $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = E$ donc $f \in \mathscr{A} \oplus \mathscr{S}$ et il existe un (unique) couple $(g, h) \in \mathscr{A} \times \mathscr{S}$ tel que $f = g + h$. Or par la question précédente, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{E}$ et $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{E}$, donc $g \in \mathscr{E}$ et $h \in \mathscr{E}$. Ainsi, si $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel, alors il est stable par addition, donc $f = g + h \in \mathscr{E}$. D'où, $E \subseteq \mathscr{E}$. Or par la question précédente, $f_0 \in E$ et $f_0 \notin \mathscr{E}$. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$