Devoir Maison 9
Dénombrement, applications linéaires, intégration

A faire pour le mardi 30 avril

Problème I - Dénombrement

Le perroquet du capitaine Haddock possède un nombre limité de mots dans son vocabulaire que l'on range en deux catégories : n mots de la vie courante tels que

« dring » « allô » « caramba »

et m mots du capitaine telles que

« mille-sabords » « tonnerre » « boit-sans-soif »
« ectoplasme » « moule-à-gauffre » « bachi-bouzouk »

On suppose que chaque phrase du perroquet contient p mots (éventuellement plusieurs fois le même) avec $1 \leqslant p \leqslant \min(m, n)$.

1. Combien de phrases peut prononcer le perroquet ?
2. Combien de phrases ont exactement p mots différents ?
3. Combien de phrases ont exactement $p-1$ mots différents ?
4. Combien de phrases ont au plus $p-2$ mots différents ?
5. Combien de phrases possèdent au moins un mot de la vie courante et au moins un mot du capitaine Haddock ?
6. Soit $k \in [\![0; p]\!]$. Combien de phrases possèdent exactement k mots (non nécessairement distincts) de la vie courante et $p-k$ mots (non nécessairement distincts) du capitaine Haddock ?

On suppose dans la suite que $m = 1$: le perroquet n'utilise qu'une seule expression du capitaine, « mille-sabords », et que toutes les autres expressions proviennent de la vie courante.

7. Soit $k \in [\![0; p]\!]$. Quel est le nombre de phrases que peut prononcer le perroquet dans cette situation plaçant dans la phrase k fois exactement le mot « mille-sabords » ?
8. Justifier par un calcul direct puis par une approche combinatoire que

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{n} (p-k)^n .$$

Problème II - Algèbre linéaire

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère $u \in \mathscr{L}(E,F)$, et $v \in \mathscr{L}(E,G)$. Le but de ce problème est de démontrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists w \in \mathscr{L}(F,G)\,, \quad v = w \circ u.$$

Partie 1 : L'attaque des morphismes aplatisseurs !

On confond dans cette partie $\mathbb{R}^3$ avec $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^2$ avec $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Posons pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, on pose $u(X) = AX$ et $v(X) = BX$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$. On admet que $v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$.
2. Déterminer le noyau de u et en préciser une base.
3. En déduire le rang de u puis que u est surjective.
4. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u)$.
5. Déterminer l'image et le noyau de v. Vérifier la cohérence des dimensions.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v)$.

Pour $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on définit $w \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ par $w : X \mapsto CX$.

7. Montrer qu'il une unique matrice $C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telle que $B = CA$.
8. En déduire dans ce cas que $v = w \circ u$.

Partie 2 : Deux chemins qui ne mènent à $\mathbb{R}_1$ (c'est déjà quelque chose)

Soit $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit

$$u \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto X^2 P'' - 2P. \end{aligned}$$

9. Montrer que u est un endomorphisme de E.
10. Déterminer le noyau de u.
11. Déterminer le rang de u.

On pose

$$v \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_1[X] \\ P &\mapsto \left(P(0) + P(1) - \frac{P''(1)}{2}\right) X + P(0) + 2P(1) - P''(1). \end{aligned}$$

On admet que v est linéaire (facile à faire si vous voulez vous entrainer).

12. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v)$.
13. Montrer que $w \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_1[X])$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $w(P) = -\frac{X+1}{2}P(0) - \frac{X+2}{2}P(1)$ vérifie $v = w \circ u$.
14. (a) Calculer $v(1)$ et $v(X)$.
    (b) En déduire que v est surjective.
15. Montrer que si $n \geqslant 3$, alors $\mathrm{Ker}\,(u) \neq \mathrm{Ker}\,(v)$.

Partie 3 : So 2010...

16. On suppose dans cette question qu'il existe $w \in \mathscr{L}(F, G)$, telle que $v = w \circ u$.
    Montrer que $\text{Ker}(u) \subseteq \text{Ker}(v)$.

On note $n = \dim(E)$, $r = \dim(F)$ et $p = n - \dim(\text{Ker}(u))$.

17. Justifier qu'il existe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\text{Ker}(u)$.
    Quelle est la dimension de $\text{Im}(u)$?
18. Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que $(f_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une base de $\text{Im}(u)$.
19. Justifier qu'il existe des vecteurs $(f_{p+1}, \ldots, f_r)$ de telle sorte que $(f_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ soit une base de F.

On définit $w \in \mathscr{L}(F, G)$ par

$$\forall i \in [\![1; r]\!], \qquad w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } i \in [\![1; p]\!] \\ 0_G & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que $\text{Ker}(u) \subseteq \text{Ker}(v)$.

20. Montrer que $v = w \circ u$.
21. Montrer que $\text{Im}(v) = \text{Im}(w)$.
22. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(v) \;\Leftrightarrow\; \text{Ker}(w) \oplus \text{Im}(u)$.
23. Par un argument de dimension, en déduire que dans ce cas, les espaces $\text{Ker}(w)$ et $\text{Im}(u)$ sont même supplémentaires.

Problème III - Intégration

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$h(x) = \int_1^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t} \, \mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Une fonction h-ment intéressante.

1. (a) Démontrer proprement que h est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Déterminer la parité de h.
   (c) Préciser le signe de h sur $\mathbb{R}^*$ et ses valeurs d'annulation.
2. (a) Justifier que h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}^*$. *On ne précisera pas les limites aux bords.*
3. (a) A l'aide d'un développement limité, déterminer au voisinage de 0 la position relative de la courbe de arctan par rapport à sa tangente.
   (b) Montrer que la comparaison obtenue en 0^+ est valable sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.
   (c) En déduire que h est minorée par $-\frac{1}{2}$ sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
   (d) En déduire un minorant de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, que l'on ne cherchera pas à déterminer, pour lequel en posant $h(0) = \alpha$ il est possible de prolonger h par continuité en 0. On note encore h ce prolongement.
5. (a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h'(x)$.
   (b) En déduire que h est dérivable à droite en 0 puis préciser l'équation de sa demi-tangente à droite ainsi que son développement limité à l'ordre 1 en 0^+ de h.
   (c) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

Partie 2 : Un étudiant qui s'est intégré passe en deuxième année

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u.$$
7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u - h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{2u}\,\mathrm{d}u.$$
8. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{\pi}{4}\ln\left(\sqrt{2}x\right) - h(x) = -h\left(\frac{1}{2x}\right).$$
9. En déduire un développement asymptotique de h à l'ordre $\frac{1}{x}$ en $+\infty$ que l'on exprimera en fonction de α notamment.

Partie 3 : En parlant de deuxième année : une petite série entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

10. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(1)$.
11. Soit $x \in [0;1]$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$.
12. Soit $x > 1$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$.

Partie 4 : Un tas d'or est caché dans la grange

On rappelle que l'on a prolongé h en 0 par une valeur notée $\alpha \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$ et que l'on a montré à la question 6. que
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \alpha.$$
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in \mathbb{R}$, $\left|\arctan^{(n)}(u)\right| \leqslant (n-1)!$.
On fixe $n \in \mathbb{N}$.

13. Montrer que pour tout $u \in [0;1]$,
$$\left|\arctan(u) - \sum_{k=0}^{n} a_k u^{2k+1}\right| \leqslant \frac{u^{2n+2}}{2n+2},$$
où les a_k sont des coefficients que l'on précisera sans démonstration.
14. En déduire que pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,
$$S_n\left(\sqrt{2}x\right) - S_n(1) - \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2} \geqslant 2h(x) \geqslant S_n\left(\sqrt{2}x\right) - S_n(1) + \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2}.$$
15. En déduire un encadrement de α en fonction de n et de $S_n(1)$.
16. Ecrire alors α comme la somme totale d'une série convergente.