Epreuve de mathématiques 7
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Applications linéaires

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
L'objectif de ce problème est de déterminer *les racines carrées* de f i.e. de trouver les endomorphismes g de E tels que $g^2 = g \circ g = f$.

Partie 1 : Généralités

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ une racine carrée de f : $g^2 = g \circ g = f$.

1. Quelles sont les racines carrées de Id_E ?
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow g \in \mathrm{GL}(E)$.
5. Montrer que f et g commutent : $f \circ g = g \circ f$.
6. On suppose dans cette question que E de dimension finie. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f).$$
7. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g) = g(\mathrm{Ker}(f))$.

Partie 2 : Un exemple dans $\mathbb{R}^2$

On fixe dans cette partie $E = \mathbb{R}^2$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_\theta(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

8. Montrer que f_θ est un endomorphisme de E.
9. Montrer que f_θ est un automorphisme de E.
10. Soient $\theta' \in \mathbb{R}$.
    (a) Justifier que $f_\theta \circ f_{\theta'}$ est un automorphisme de E.
    (b) Montrer que $f_\theta \circ f_{\theta'} = f_{\theta+\theta'}$.
11. Déduire de la question précédente f_θ^{-1}.
12. Déduire également de la question 10. une racine carrée de f_θ.
13. Montrer que f_π est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques (par rapport à quel ensemble et parallèlement à quel ensemble).
14. Préciser une racine carrée de f_π.

Partie 3 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

On fixe dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ que l'on identifie à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On pose $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

15. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
16. Déterminer l'image de φ, en préciser une base.
17. Déterminer le rang de φ.
18. Déterminer un supplémentaire à $\mathrm{Im}(\varphi)$.
19. Calculer $\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ puis en déduire le noyau de φ, en préciser une base.
20. $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Posons $\varphi_1 = \varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $\varphi_4 = \varphi - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

21. Déterminer une base du noyau de φ_1 et une base du noyau de φ_4.
22. On pose $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
23. On pose $G = \mathrm{Ker}(\varphi_1) + \mathrm{Ker}(\varphi_4)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et G sont supplémentaires dans E.
24. Calculer $\varphi(\mathscr{B})$.
25. Préciser si φ est injective, surjective et/ou bijective.

Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\psi^2 = \varphi$. On admet qu'alors il existe $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, $\psi(e_i) = \mu_i e_i$.

26. Déterminer les différentes valeurs possibles pour μ_1, μ_2, μ_3.
27. En déduire que φ admet au plus 4 racines carrées.

Partie 4 : Racines carrées de 0

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On note $r = \mathrm{rg}(g)$.

28. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.
29. Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leqslant \frac{n}{2}$.
30. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(g)$. Justifier que $\dim(F) = r$.
31. Soit $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$ une base de F. Montrer que $g(\mathscr{B}_F) = (g(e_1), \dots, g(e_r))$ est libre.
32. De quel espace $g(\mathscr{B}_F)$ est-ce une base ? Le démontrer.
33. On suppose que $n = 2r$. Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_r), e_1, \dots, e_r)$ est une base de E.

Partie 5 : Un contre-exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application suivante :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -a+b-c+d & -a-b+c+d \\ 0 & -2a+2d \end{pmatrix} \end{array}.$$

On admet que $F \in \mathscr{L}(E)$.

34. Déterminer une base du noyau de F.
35. Déterminer une base de l'image de F. Vérifier la cohérence des dimensions.
36. Montrer que si $\mathscr{B}_I$ est une base *quelconque* de $\operatorname{Im}(F)$, alors $F(\mathscr{B}_I)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(F^2)$.
37. Déduire des deux questions précédentes $\operatorname{Im}(F^2)$.
38. En déduire que $F^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Soient G une racine carrée de F et $\mathscr{N} = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid G^k = 0_{\mathscr{L}(E)} \right\}$.

39. Montrer que $\mathscr{N}$ admet un minimum. On note $p = \min(\mathscr{N})$.
40. Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que $G^{p-1}(a) \neq 0_E$.
41. Montrer que $(a, G(a), \dots, G^{p-1}(a))$ est libre.
    On pourra composer par G^{p-1}.
42. En déduire que $p \leqslant 4$ puis que $G^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
43. Conclure que F n'admet aucune racine carrée.

Partie 6 : Un contre-exemple dans $\mathbb{R}[X]$

On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application suivante :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'. \end{array}$$

On admet que $D \in \mathscr{L}(E)$ et on suppose que $T \in \mathscr{L}(E)$ est une racine carrée de D : $T^2 = D$.

44. Préciser $\operatorname{Ker}(D)$ et sa dimension.
45. Montrer que T n'est pas injective.
46. En déduire que $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(D)$.
47. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker}(T^n) = \operatorname{Ker}(T)$.
48. Conclure à une contradiction.

Problème 2 - Dénombrement

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = [\![1;n]\!]$. On appelle partition ordonnée de E, une famille $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de $p \in [\![1;n]\!]$ sous-ensembles de E vérifiant

- $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \in \mathscr{P}(E)$ i.e. $A_i \subseteq E$,
- $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]$, $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1;p]\!]} A_i = E$,

pour laquelle l'ordre d'apparition des A_i dans la famille est important (exemple : $(\{1\}, \{2,3\})$ et $(\{2,3\}, \{1\})$ sont deux partitions ordonnées distinctes).
On note u_n le nombre de partitions ordonnées de E et pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, $u_{n,p}$ le nombre de partitions ordonnées de E avec exactement p sous-ensembles de E.

1. (a) Montrer que $u_1 = 1$.
   (b) Si $n = 2$, énumérer les partitions ordonnées de E et vérifier que $u_2 = 3$.
   (c) Si $n = 3$, énumérer les partitions ordonnées de E et vérifier que $u_3 = 13$.
2. Calculer $u_{n,1}$ le nombre de partitions ordonnées de $E = [\![1;n]\!]$ ayant exactement 1 seul sous-ensemble de E.
3. Calculer $u_{n,n}$ le nombre de partitions ordonnées de $E = [\![1;n]\!]$ ayant exactement n sous-ensembles de E.
4. Soit $n \geqslant 3$. Calculer $u_{n,n-1}$ le nombre de partitions ordonnées de $E = [\![1;n]\!]$ ayant exactement $n-1$ sous-ensembles de E.
5. Justifier que construire une partition ordonnée avec exactement deux sous-ensembles de E revient à prendre un élément de $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$.
6. En déduire $u_{n,2}$.
7. Soit $p \in [\![2;n]\!]$. Montrer que
$$u_{n,p} = \sum_{k=1}^{n-p+1} \binom{n}{k} u_{n-k,p-1}.$$
On pourra utiliser v_k le nombre de partitions ordonnées de E dont le premier sous-ensemble A_1 de la partition de E contient exactement k éléments.
8. Retrouver alors le résultat de la question 6.
9. Déduire de la question 7. que
$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u_k.$$
10. Retrouver alors le résultat de la question 1.c puis calculer u_4.