Corrigé du Devoir Surveillé 7
Applications linéaires et dénombrement

Problème I - Applications linéaires

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
L'objectif de ce problème est de déterminer *les racines carrées* de f i.e. de trouver les endomorphismes g de E tels que $g^2 = g \circ g = f$.

Partie 1 : Généralités

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ une racine carrée de f : $g^2 = g \circ g = f$.

1. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = \mathrm{Id}_E$. Puisque g est par hypothèse un endomorphisme, par caractérisation, on en déduit que g est une symétrie (sur $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}_E)$). Conclusion,

$$\boxed{\text{Les racines carrées de } \mathrm{Id}_E \text{ sont les symétries vectorielles de } E.}$$

2. Montrons que $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0_E$. Dès lors, en composant à nouveau par g,

$$g(g(x)) = g(0_E) \qquad \Leftrightarrow \qquad g^2(x) = g(0_E) = 0_E \qquad \text{car } g \text{ est linéaire.}$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}\left(g^2\right)$. Ceci étant vrai pour $x \in \mathrm{Ker}(g)$ quelconque, on conclut que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f).}$$

3. Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors,

$$\exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Donc par définition de g, $y = f(x) = g^2(x) = g(g(x)) \in \mathrm{Im}(g)$. Ceci étant vrai pour $x \in \mathrm{Im}(f)$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g).}$$

4. Montrons que $f \in \mathrm{GL}(E) \;\Leftrightarrow\; g \in \mathrm{GL}(E)$. Supposons $f \in \mathrm{GL}(E)$. Alors nécessairement f est injective et surjective donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = E$. Donc par les deux questions précédentes,

$$\{0_E\} \subseteq \mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Donc $\mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$. Et,

$$E = \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g) \subseteq E.$$

Donc $\mathrm{Im}(g) = E$. Donc g est injective et surjective. Donc $g \in \mathrm{GL}(E)$. Ainsi,

$$f \in \mathrm{GL}(E) \;\Rightarrow\; g \in \mathrm{GL}(E).$$

Réciproquement, supposons $g \in \mathrm{GL}(E)$. Par stabilité de $\mathrm{GL}(E)$ par composition, on obtient directement que $f = g^2 = g \circ g \in \mathrm{GL}(E)$. D'où

$$g \in \mathrm{GL}(E) \;\Rightarrow\; f \in \mathrm{GL}(E).$$

Conclusion,

$$\boxed{f \in \mathrm{GL}(E) \;\Rightarrow\; g \in \mathrm{GL}(E).}$$

5. On a directement :
$$f \circ g = g^2 \circ g = g^3 = g \circ g^2 = g \circ f.$$
Conclusion, f et g commutent :
$$\boxed{f \circ g = g \circ f.}$$

6. On suppose dans cette question que E de dimension finie. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Ker}\,(f) \Rightarrow \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f)$. Supposons $\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Ker}\,(f)$. Alors, par le théorème du rang, car E est de dimension finie,
$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}\,(f)) &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(f))\\ &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) \qquad \text{car } \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Ker}\,(f)\\ &= \dim(\mathrm{Im}\,(g)) \qquad \text{par le théorème du rang.}\end{aligned}$$
De plus, on a vu à la question 3.
$$\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathrm{Im}\,(g).$$
Donc, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g)$. D'où,
$$\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Ker}\,(f) \qquad \Rightarrow \mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f).$$
Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f)$. Alors, à nouveau par le théorème du rang,
$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}\,(f))\\ &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}\,(g)) \qquad \text{car } \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g)\\ &= \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) \qquad \text{par le théorème du rang.}\end{aligned}$$
Donc par la question 2.
$$\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g).$$
D'où, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g) \Rightarrow \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Ker}\,(f)$. Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Ker}\,(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g).}$$

7. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(g) = g(\mathrm{Ker}\,(f))$. Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(g)$. Alors,
$$\begin{aligned}\begin{cases} y \in \mathrm{Ker}\,(g)\\ y \in \mathrm{Im}\,(g)\end{cases} &\Rightarrow \quad \begin{cases} g(y) = 0_E\\ \exists x \in E,\ y = g(x)\end{cases}\\ &\Rightarrow \quad g(g(x)) = 0_E\\ &\Rightarrow \quad f(x) = 0_E\\ &\Rightarrow \quad x \in \mathrm{Ker}\,(f).\end{aligned}$$
Or $y = g(x)$ donc $y \in g(\mathrm{Ker}\,(f))$. Ainsi,
$$\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(g) \subseteq g(\mathrm{Ker}\,(f)).$$
Réciproquement, soit $y \in g(\mathrm{Ker}\,(f))$. Alors, il existe $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$ tel que $y = g(x)$. Montrons que $y \in \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(g)$.

- D'une part, on a
$$\begin{aligned}g(y) = g(g(x)) = g^2(x) &= f(x) \qquad \text{par définition de } g\\ &= 0_E \qquad \text{car } x \in Ker\,(f).\end{aligned}$$
Donc $y \in \mathrm{Ker}\,(g)$.
- D'autre part, on a $y = g(x)$ et donc directement $y \in \mathrm{Im}\,(g)$.

D'où, $y \in \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ et $g(\mathrm{Ker}\,(f)) \subseteq \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(g)$. Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(g) = g(\mathrm{Ker}\,(f)).}$$

Partie 2 : Un exemple dans $\mathbb{R}^2$

On fixe dans cette partie $E = \mathbb{R}^2$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_\theta(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

8. Par définition, f_θ va bien de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrons que f est linéaire. Soient $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les égalités dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\begin{aligned}
f_\theta(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) &= f_\theta(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\
&= \big((\lambda x + \mu x')\cos(\theta) - (\lambda y + \mu y')\sin(\theta), \\
&\qquad (\lambda x + \mu x')\sin(\theta) + (\lambda y + \mu y')\cos(\theta)\big) \\
&= (\lambda(x\cos(\theta) - y\sin(\theta)) + \mu(x\cos(\theta) - y\sin(\theta)), \\
&\qquad \lambda(x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) + \mu(x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta))) \\
&= \lambda(x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) + \mu(x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta), \\
&\qquad x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta)) \\
&= \lambda f_\theta(x, y) + \mu f_\theta(x', y').
\end{aligned}$$

Donc f_θ est linéaire. Conclusion,

$$\boxed{f_\theta \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

9. Montrons que f_θ est un automorphisme de E. On sait déjà que f_θ est un endomorphisme. Montrons donc que f_θ est bijectif. Déterminons le noyau de f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \operatorname{Ker}(f_\theta) \quad &\Leftrightarrow \quad f_\theta(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)) = (0, 0) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) = 0 \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

En particulier, en faisant d'une part, $\cos(\theta) L_1 + \sin(\theta) L_2$, on obtient

$$x\cos^2(\theta) - y\cos(\theta)\sin(\theta) + x\sin^2(\theta) + y\sin(\theta)\cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Donc $\begin{cases} -y\sin(\theta) = 0 \\ y\cos(\theta) = 0. \end{cases}$ Donc en faisant $-\sin(\theta) L_1 + \cos(\theta) L_2$, on obtient $y = 0$. Réciproquement, si $x = y = 0$, on a $(x, y) \in \operatorname{Ker}(f_\theta)$. Donc

$$\operatorname{Ker}(f_\theta) = \{0_E\}.$$

Par caractérisation, f_θ est injective. Or l'espace d'arrivée a même dimension que l'espace de départ (car f_θ est un endomorphisme en dimension finie). Conclusion, par caractérisation des isomorphismes en dimension finie :

$$\boxed{f_\theta \text{ est un automorphisme de } E.}$$

10. Soient $\theta' \in \mathbb{R}$.

   (a) Par la question précédente, on sait que $f_\theta \in \mathrm{GL}(E)$ et $f_{\theta'} \in \mathrm{GL}(E)$. Donc par stabilité par composition,

$$\boxed{f_\theta \circ f_{\theta'} \in \mathrm{GL}(E).}$$

(b) Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Calculons,

$$\begin{aligned}
f_\theta\circ f_{\theta'}(u) &= f_\theta\left(x\cos\left(\theta'\right)-y\sin\left(\theta'\right),x\sin\left(\theta'\right)+y\cos\left(\theta'\right)\right)\\
&= \Big(\left(x\cos\left(\theta'\right)-y\sin\left(\theta'\right)\right)\cos\left(\theta\right)-\left(x\sin\left(\theta'\right)+y\cos\left(\theta'\right)\right)\sin\left(\theta\right),\\
&\qquad \left(x\cos\left(\theta'\right)-y\sin\left(\theta'\right)\right)\sin\left(\theta\right)+\left(x\sin\left(\theta'\right)+y\cos\left(\theta'\right)\right)\cos\left(\theta\right)\Big)\\
&= \Big(x\left(\cos\left(\theta\right)\cos\left(\theta'\right)-\sin\left(\theta\right)\sin\left(\theta'\right)\right)-y\left(\cos\left(\theta\right)\sin\left(\theta'\right)+\sin\left(\theta\right)\cos\left(\theta'\right)\right),\\
&\qquad x\left(\cos\left(\theta'\right)\sin\left(\theta\right)+\sin\left(\theta'\right)\cos\left(\theta\right)\right)+y\left(\cos\left(\theta\right)\cos\left(\theta'\right)-\sin\left(\theta\right)\sin\left(\theta'\right)\right)\Big)\\
&= \left(x\cos\left(\theta+\theta'\right)-y\sin\left(\theta+\theta'\right),x\sin\left(\theta+\theta'\right)+y\cos\left(\theta+\theta'\right)\right)\\
&= f_{\theta+\theta'}\left(u\right).
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $u\in\mathbb{R}^2$, on conclut que

$$\boxed{f_\theta\circ f_{\theta'}=f_{\theta+\theta'}.}$$

11. On a déjà vu que $f_\theta\in\mathrm{GL}\left(E\right)$. De plus, par la question précédente avec $\theta'=-\theta$ on a

$$f_\theta\circ f_{-\theta}=f_{\theta-\theta}=f_0\qquad\text{et}\qquad f_{-\theta}\circ f_\theta=f_{-\theta+\theta}=f_0.$$

Or pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f_0\left(x,y\right)=\left(x\cos(0)-y\sin(0),x\sin(0)+y\cos(0)\right)=\left(x,y\right).$$

Donc $f_0=\mathrm{Id}_E$. Ainsi,

$$f_\theta\circ f_{-\theta}=f_{-\theta}\circ f_\theta=\mathrm{Id}_E.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\,\theta\in\mathbb{R},\qquad f_\theta^{-1}=f_{-\theta}.}$$

12. Posons $g=f_{\theta/2}$. Alors, par la question 8. $g\in\mathscr{L}\left(E\right)$. De plus, par la question 10. on observe que

$$g^2=f_{\theta/2}\circ f_{\theta/2}=f_{\theta/2+\theta/2}=f_\theta.$$

Conclusion,

$$\boxed{g=f_{\theta/2}\text{ est une racine carrée de }f_\theta.}$$

13. Par la question précédente, on a $f_\pi^2=f_{2\pi}$. On on observe que $f_{2\pi}=f_0=\mathrm{Id}_E$. Donc $f_\pi^2=\mathrm{Id}_E$. De plus, par la question 8. $f_\pi\in\mathscr{L}\left(E\right)$. Conclusion,

$$\boxed{f_\pi\text{ est une symétrie vectorielle.}}$$

De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f_\pi\left(x,y\right)=\left(x\cos\left(\pi\right)-y\sin\left(\pi\right),x\sin\left(\pi\right)+y\cos\left(\pi\right)\right)=\left(-x,-y\right).$$

Déterminons ses éléments caractéristiques. Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
u\in\mathrm{Ker}\left(f_\pi-\mathrm{Id}_E\right)\quad&\Leftrightarrow\quad f_\pi\left(x,y\right)-\left(x,y\right)=0_{\mathbb{R}^2}\\
&\Leftrightarrow\quad \left(-x,-y\right)-\left(x,y\right)=\left(0,0\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \left(-2x,-2y\right)=\left(0,0\right)\\
&\Leftrightarrow\quad x=y=0\\
&\Leftrightarrow\quad u=\left(0,0\right).
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(f_\pi - \operatorname{Id}_E) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. De même,

$$\begin{array}{rcl} u \in \operatorname{Ker}(f_\pi + \operatorname{Id}_E) & \Leftrightarrow & (-x,-y)+(x,y)=(0,0) \\ & \Leftrightarrow & (0,0)=(0,0)\,. \end{array}$$

Donc $\operatorname{Ker}(f_\pi + \operatorname{Id}_E) = E$.

Ce qui est cohérent car $Ker(f_\pi + Id_E)$ est supplémentaire à $Ker(f_\pi - Id_E) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Conclusion,

$$\boxed{f_\pi \text{ est une symétrie par rapport à } \{0_E\} \text{ parallèlement à } E.}$$

Autrement dit, f_π est une symétrie centrale de centre $0_{\mathbb{R}^2}$.

14. Par la question 12. $f_{\frac{\pi}{2}}$ est une racine carrée de f_π. Or pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = \left(x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-y,x)\,.$$

Conclusion, une racine carrée de f_π est donnée par

$$\boxed{f_{\frac{\pi}{2}} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-y,x)\,. \end{array}}$$

Nous verrons en géométrie du plan que les f_θ sont les rotations vectorielles d'angle θ.

Partie 3 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

On fixe dans cette partie $E=\mathbb{R}^3$ que l'on identifie à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On pose $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

15. Si $X\in\mathbb{R}^3 = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors AX existe et $AX\in\mathbb{R}^3$. Donc φ est bien définie sur $\mathbb{R}^3$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Montrons que φ est linéaire. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(X,Y)\in\left(\mathbb{R}^3\right)^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda X+\mu Y) &= A(\lambda X+\mu Y) \\ &= \lambda AX + \mu AY \qquad \text{par linéarité de la multiplication matricielle à gauche} \\ &= \lambda\varphi(X)+\mu\varphi(Y)\,. \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire. Conclusion,

$$\boxed{\varphi\in\mathscr{L}(E)\,.}$$

16. On sait que $\mathscr{C} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(\varphi(\mathscr{C}))\,.$$

Or

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\7\\1\end{bmatrix}.$$

De même, $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-3\\-3\\-1\end{bmatrix}$ et $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$. Donc

$$\operatorname{Im}(\varphi)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}7\\7\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-3\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}\right).$$

On remarque que $C_2=-C_3$ donc on peut ôter C_2 :

$$\operatorname{Im}(\varphi)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}7\\7\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}\right).$$

On peut noter que la famille obtenue est libre et retourner cette base là. Simplifions-là un peu.

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, donc,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\varphi)&=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}\right) && C_1\leftarrow C_1-C_2\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\4\end{bmatrix}\right) && C_2\leftarrow C_2-3C_1\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_2\leftarrow \frac{1}{4}C_2\\&=\operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)}_{\mathscr{B}_I} && C_1\leftarrow C_1+C_2.\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_I$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. De plus $\mathscr{B}_I$ engendre $\operatorname{Im}(\varphi)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(\varphi)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\qquad\text{et } \mathscr{B}_I=\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\text{ est une base de } \operatorname{Im}(\varphi).}$$

17. Par la question précédente, on a directement,

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi))=\operatorname{Card}(\mathscr{B}_I)=2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(\varphi)=2.}$$

18. Puisque $\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=3$ et $\operatorname{rg}(\varphi)=2$, il nous suffit de trouver un espace de dimension 1 comme supplémentaire. Dans $\mathscr{B}_I$, on note qu'il manque un pivot en deuxième coordonnée. Posons $\mathscr{B}_H=\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ et $H=\operatorname{Vect}(\mathscr{B}_H)$. Par définition, $\mathscr{B}_H$ engendre H et $\mathscr{B}_H$ est constitué d'un seul vecteur

non nul. Donc $\mathscr{B}_H$ est libre. Ainsi, $\mathscr{B}_H$ est une base de H. Posons $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_I, \mathscr{B}_H)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors,

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = 0$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Donc $\mathscr{B}$ base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi,

- $\mathscr{B}_I$ base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$,
- $\mathscr{B}_H$ base de H,
- $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_I, \mathscr{B}_H)$ base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{H = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \text{ est un supplémentaire de } \mathrm{Im}\,(\varphi).}$$

19. On a

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ et est non nul. Donc $\mathscr{B}_K = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Or par le théorème du rang, car $E = \mathbb{R}^3$ est de dimension finie, et la question 17. on a

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(\varphi)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \mathrm{rg}\,(\varphi) = 3 - 2 = 1.$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est une droite vectoriel. Puisque $\mathscr{B}_k$ est libre dans $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ et $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_K) = 1 = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(\varphi)\right)$, on en déduit que $\mathscr{B}_K$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3}, \qquad \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_K = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,(\varphi).}$$

20. Par ce qui précède, on a

$$\mathrm{Im}\,(\varphi) + \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(\varphi)+\mathrm{Ker}\,(\varphi) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_2\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftrightarrow C_2\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 - C_2\\
&= \mathbb{R}^3 && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

De plus, par le théorème du rang, car $E=\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, on a

$$\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi))+\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi))=\dim(E)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(\varphi) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(\varphi) \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

Posons $\varphi_1=\varphi-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $\varphi_4=\varphi-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

21. Soit $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X\in\mathrm{Ker}\,(\varphi_1) &\Leftrightarrow \varphi_1(X)=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow \varphi(X)-X=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}7&-3&3\\7&-3&3\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix}7x-3y+3z-x\\7x-3y+3z-y\\x-y+z-z\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}6x-3y+3z=0\\7x-4y+3z=0\\x-y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\7x-4y+3z=0\\6x-3y+3z=0\end{cases} && L_1\leftrightarrow L_3\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\3y+3z=0\\3y+3z=0\end{cases} && \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-7L_1\\L_3\leftarrow L_3-6L_1\end{matrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\3y+3z=0\end{cases} && \text{car } L_2=L_3\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\z=-y\end{cases}\\
&\Leftrightarrow X=y\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi_1) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_1}$. La famille $\mathscr{B}_1$ engendre $\operatorname{Ker}(\varphi_1)$ et est libre (un seul vecteur non nul). Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_1 = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(\varphi_1).}$$

De même, pour $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(\varphi_4) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(X) - 4X = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}7x-3y+3z-4x\\7x-3y+3z-4y\\x-y+z-4z\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}3x-3y+3z=0\\7x-7y+3z=0\\x-y-3z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x-y+z=0\\7x-7y+3z=0\\x-y-3z=0\end{cases} \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x-y+z=0\\-4z=0\\-4z=0\end{cases} \qquad \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{array}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=y\\z=0\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad X = y\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi_4) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_4}$. La famille $\mathscr{B}_4$ engendre $\operatorname{Ker}(\varphi_4)$ et est libre (un seul vecteur non nul). Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_4 = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(\varphi_4).}$$

22. On pose $e_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors

$$\begin{bmatrix} b+c \\ a+b+c \\ a-b \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b+c=0 \\ a+b+c=0 \\ a-b=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b+c=0 \\ a=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ a-b=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad a=b=c=0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\text{Card}\,(\mathscr{B}) = 3 = \dim(E)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } E.}$$

23. On pose $G = \text{Ker}\,(\varphi_1) + \text{Ker}\,(\varphi_4)$. Par les questions précédentes, on observe que

- $\mathscr{B}_K = (e_1)$ est une base de $\text{Ker}\,(\varphi)$,
- $\mathscr{B}_1 = (e_2)$ est une base de $\text{Ker}\,(\varphi_1)$,
- $\mathscr{B}_4 = (e_4)$ est une base de $\text{Ker}\,(\varphi_4)$.

Donc $G = \text{Vect}\,(e_2) + \text{Vect}\,(e_3) = \text{Vect}\,(e_2, e_3)$. Donc $\mathscr{B}_G = (e_2, e_3)$ engendre G. De plus $\mathscr{B}_G$ est libre en tant que sous-famille de $\mathscr{B}$ (qui est libre en tant que base de E par la question précédente). Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Ainsi,

- $\mathscr{B}_K = (e_1)$ est une base de $\text{Ker}\,(\varphi)$,
- $\mathscr{B}_G = (e_2, e_3)$ est une base de G,
- $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) = (\mathscr{B}_K, \mathscr{B}_G)$ est une base de E (question précédente).

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\text{Ker}\,(\varphi) \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

24. On sait que $e_1 \in \text{Ker}\,(\varphi)$. Donc $\varphi(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On sait que $e_2 \in \text{Ker}\,(\varphi_1)$ donc $\varphi_1(e_2) = 0_E$ i.e. $\varphi(e_2) - e_2 = 0_E$ et ainsi $\varphi(e_2) = e_2$. De même $e_3 \in \text{Ker}\,(\varphi_4)$ donc $\varphi(e_3) = 4e_3$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi(\mathscr{B}) = (0_E, e_2, 4e_3)\,.}$$

On pouvait aussi calculer explicitement chaque image.

25. La famille $\mathscr{B}$ est une base de E et $\varphi(\mathscr{B})$ n'est pas libre (car contient le vecteur nul). Donc φ n'est pas injective. (On pouvait aussi parler du noyau non réduit à $\{0_E\}$).

Puisque φ est un endomorphisme de E et E est de dimension finie, on en déduit par caractérisation des isomorphismes que φ n'est ni surjective ni bijective non plus. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.}}$$

Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\psi^2 = \varphi$. On admet qu'alors il existe $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, $\psi(e_i) = \mu_i e_i$.

26. Par la question précédente 24. on a $\psi^2(\mathscr{B}) = \varphi(\mathscr{B}) = (0_E, e_2, 4e_3)$. Donc

$$\begin{aligned}(0_E, e_2, 4e_3) &= \left(\psi^2(e_1), \psi^2(e_2), \psi^2(e_3)\right)\\ &= \left(\psi(\psi(e_1)), \psi(\psi(e_2)), \psi(\psi(e_3))\right)\\ &= \left(\psi(\mu_1 e_1), \psi(\mu_2 e_2), \psi(\mu_3 e_3)\right)\\ &= \left(\mu_1\psi(e_1), \mu_2\psi(e_2), \mu_3\psi(e_3)\right) \qquad \text{car } \psi \text{ est linéaire}\\ &= \left(\mu_1^2 e_1, \mu_2^2 e_2, \mu_3^2 e_3\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases}\mu_1^2 e_1 = 0_E\\ \mu_2^2 e_2 = e_2\\ \mu_3^2 e_3 = 4e_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu_1^2 = 0_{\mathbb{R}}\\ \left(\mu_2^2 - 1\right) e_2 = 0_E\\ \left(\mu_3^2 - 4\right) e_3 = 0_E\end{cases} \quad \text{car } e_1 \neq 0_E$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\mu_1 = 0\\ \mu_2^2 = 1\\ \mu_3^2 = 4\end{cases} \quad \text{car } e_2 \neq 0_E \text{ et } e_3 \neq 0_E$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\mu_1 = 0\\ \mu_2 = 1 \text{ OU } \mu_2 = -1\\ \mu_3 = 2 \text{ OU } \mu_3 = -2\end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mu_1 = 0, \qquad \mu_2 \in \{-1; 1\}, \qquad \mu_3 \in \{-2; 2\}.}$$

27. Fixons (μ_1, μ_2, μ_3) un triplet de $\{0_E\} \times \{-1; 1\} \times \{-2; 2\}$. Alors, $\psi(\mathscr{B}) = (0_E, \mu_2 e_2, \mu_3 e_3)$ est fixée. Or une application est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc pour cette valeur de (μ_1, μ_2, μ_3), l'application g est unique et entièrement déterminée sur E. Or

$$\mathrm{Card}\left(\{0_E\} \times \{-1; 1\} \times \{-2; 2\}\right) = \mathrm{Card}\left(\{0_E\}\right) \times \mathrm{Card}\left(\{-1; 1\}\right) \times \mathrm{Card}\left(\{-2; 2\}\right) = 1 \times 2 \times 2 = 4.$$

Donc il y a uniquement 4 valeurs de triplets (μ_1, μ_2, μ_3) possibles et donc 4 valeurs possibles de g. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ admet au plus 4 racines carrées.}}$$

Partie 4 : Racine carrée de 0

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On note $r = \mathrm{rg}(g)$.

28. Montrons que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Donc

$$g(y) = g(g(x)) = g^2(x) = 0_E \qquad \text{car } g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ par hypothèse.}$$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$. Ceci étant vrai pour $y \in \mathrm{Im}(g)$ quelconque, on en conclut que

$$\boxed{\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(g).}$$

29. Puisque E est de dimension finie, $\mathrm{rg}(g)$ existe, $\mathrm{Ker}(g)$ est de dimension finie et par la question précédente,

$$\mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g)).$$

Or par le théorème du rang, car E est de dimension finie,

$$\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(g) = n - \mathrm{rg}(g).$$

D'où,

$$\mathrm{rg}\,(g) \leqslant n - \mathrm{rg}\,(g) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\mathrm{rg}\,(g) \leqslant n \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{rg}\,(g) \leqslant \frac{n}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(g) \leqslant \frac{n}{2}.}$$

30. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(g)$. Comme E est de dimension finie, on sait alors que

$$\dim(F) + \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) = \dim(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \dim(F) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(g)).$$

Or par le théorème du rang, $\dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) = \mathrm{rg}\,(g) = r$. D'où

$$\boxed{\dim(F) = r.}$$

31. Soit $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$ une base de F. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, g(e_i) = 0_E.$$

Par linéarité de g,

$$g\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, e_i\right) = 0_E.$$

Donc $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, e_i \in \mathrm{Ker}\,(g)$. Or $x \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_r)$. Donc $x \in F$ car $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(g) \cap F$. Cependant $\mathrm{Ker}\,(g)$ et F sont supplémentaires donc en somme directe donc $\mathrm{Ker}\,(g) \cap F = \{0_E\}$. D'où,

$$x = 0_E \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, e_i = 0_E.$$

Or $\mathscr{B}_F$ est libre. Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_{\mathbb{R}}$. Conclusion,

$$\boxed{g(\mathscr{B}_F) = (g(e_1), \dots, g(e_r)) \text{ est libre.}}$$

32. Montrons que $g(\mathscr{B}_F)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(g)$. Pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, on a $g(e_i) \in \mathrm{Im}\,(g)$. Donc $g(\mathscr{B}_F)$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Im}\,(g)$. De plus par la question précédente, $g(\mathscr{B}_F)$ est libre. Enfin,

$$\mathrm{Card}\,(g(\mathscr{B}_F)) = r = \mathrm{rg}\,(g) = \dim(\mathrm{Im}\,(g)).$$

Conclusion,

$$\boxed{g(\mathscr{B}_F) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(g).}$$

33. On suppose que $n = 2r$. Par ce qui précède, $g(\mathscr{B}_F)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)$. Donc $g(\mathscr{B}_F)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}\,(g)$. Or par le théorème du rang, car E est de dimension finie,

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(g)) = \dim(E) - \mathrm{rg}\,(g) = n - r = 2r - r = r = \mathrm{Card}\,(g(\mathscr{B}_F)).$$

On en déduit alors que $g(\mathscr{B}_F)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$. Or $\mathscr{B}_F$ est une base de F et F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(g)$ dans E. Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{(g(e_1), \dots, g(e_r), e_1, \dots, e_r) = (g(\mathscr{B}_F), \mathscr{B}_F) \text{ est une base de } E.}$$

Partie 5 : Un contre-exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application suivante :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -a+b-c+d & -a-b+c+d \\ 0 & -2a+2d \end{pmatrix} \end{array}.$$

On admet que $F \in \mathscr{L}(E)$.

34. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \in \operatorname{Ker}(F) \quad & \Leftrightarrow \quad F(A) = 0_2 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -a+b-c+d & -a-b+c+d \\ 0 & -2a+2d \end{pmatrix} = 0_2 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+b-c+d = 0 \\ -a-b+c+d = 0 \\ -2a+2d = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+b-c+d = 0 \\ -2b+2c = 0 \\ -2b+2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+b-c+d = 0 \\ b = c \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(F) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_K}.$$

La famille $\mathscr{B}_K$ engendre donc F et est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_K = \left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(F).}$$

35. On sait que $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donc une famille génératrice de cet espace. Ainsi,

$$\operatorname{Im}(F) = \operatorname{Vect}(F(\mathscr{C})) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

On observe que $C_3 = -C_2$ et $C_1 = -C_4$ donc on peut ôter C_2 et C_4. Ainsi,

$$\operatorname{Im}(F) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_I}.$$

La famille $\mathscr{B}_I$ engendre $\mathrm{Im}\,(F)$. De plus, $\mathscr{B}_I$ est libre car constitué de deux vecteurs non colinéaires. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_I = \left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(F)\,.}$$

En particulier, $\dim\left(\mathrm{Im}\,(F)\right) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_I) = 2$. De plus par la question précédente, $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(F)\right) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_K) = 2$. Donc

$$\dim\left(\mathrm{Im}\,(F)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\,(F)\right) = 2 + 2 = 4 = \dim\left(\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})\right).$$

$\boxed{\text{Ce qui est bien cohérent avec le théorème du rang}}$ qui s'applique ici car $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

36. Soit $\mathscr{B}_I$ une base quelconque de $\mathrm{Im}\,(F)$. Puisque $\mathrm{Im}\,(F)$ est de dimension 2, $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_I) = 2$. Notons (f_1, f_2) les deux vecteurs de $\mathscr{B}_I$. Montrons que $F\,(\mathscr{B}_I)$ engendre $\mathrm{Im}\left(F^2\right)$. Autrement dit, montrons que $\mathrm{Im}\left(F^2\right) = \mathrm{Vect}\left(F\,(\mathscr{B}_I)\right)$.

Montrons que $\mathrm{Vect}\left(F\,(\mathscr{B}_I)\right) \subseteq \mathrm{Im}\left(F^2\right)$. On a $F\,(\mathscr{B}_I) = \left(F\,(f_1)\,, F\,(f_2)\right)$. Or $\mathscr{B}_I$ est une famille de $\mathrm{Im}\,(F)$ donc $(f_1, f_2) \in \mathrm{Im}\,(F)^2$. Donc il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f_1 = F\,(x_1)$ et $f_2 = F\,(x_2)$. Ainsi,

$$F\,(\mathscr{B}_I) = \left(F\,(f_1)\,, F\,(f_2)\right) = \left(F\,(F\,(x_1))\,, F\,(F\,(x_2))\right) = \left(F^2\,(x_1)\,, F^2\,(x_2)\right).$$

Donc $F\,(\mathscr{B}_I)$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Im}\left(F^2\right)$. Or $\mathrm{Vect}\left(F\,(\mathscr{B}_I)\right)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F\,(\mathscr{B}_I)$. Donc

$$\mathrm{Vect}\left(F\,(\mathscr{B}_I)\right) \subseteq \mathrm{Im}\left(F^2\right).$$

Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}\left(F^2\right)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = F^2(x)$. On a $F(x) \in \mathrm{Im}\,(F)$ et $\mathscr{B}_I$ base de $\mathrm{Im}\,(F)$. Donc il existe (λ_1, λ_2) tel que $F(x) = \lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2$. Dès lors,

$$y = F^2(x) = F\left(\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2\right) = \lambda_1\, F\,(f_1) + \lambda_2\, F\,(f_2) \qquad \text{car } F \text{ est linéaire.}$$

Donc $y \in \mathrm{Vect}\left(F\,(\mathscr{B}_I)\right)$ et donc $\mathrm{Im}\left(F^2\right) \subseteq \mathrm{Vect}\left(F\,(\mathscr{B}_I)\right)$. D'où $\mathrm{Vect}\left(F\,(\mathscr{B}_I)\right) = \mathrm{Im}\left(F^2\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{si } \mathscr{B}_I \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(F)\text{, alors } F\,(\mathscr{B}_I) \text{ est une famille génératrice de } \mathrm{Im}\left(F^2\right).}$$

37. Par la question 35. $\mathscr{B}_I = \left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(F)$. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(F^2\right) &= \mathrm{Vect}\left(F\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1-1 & -1+1\\0 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1+1+2 & -1-1+2\\0 & -2+4\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{car } C_1 = -C_2\\
&= \mathrm{Vect}\,(I_2) \qquad C_1 \leftarrow \frac{1}{2}C_1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\left(F^2\right) = \mathrm{Vect}\,(I_2)\,.}$$

38. Calculons l'image de F^3. Soit $y \in \mathrm{Im}\left(F^3\right)$:

$$\exists x \in E, \qquad y = F^3(x) = F\left(F^2(x)\right).$$

Or $F^2(x) \in \mathrm{Im}\,(F)$. Donc par la question précédente, $F^2(x) \in \mathrm{Vect}\,(I_2)$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F^2(x) = \lambda\, I_2$. Puis, par linéarité,

$$y = F\left(\lambda\, I_2\right) = \lambda\, F\left(I_2\right) = 0_2 \qquad \text{car par la question 34. } I_2 \in \mathrm{Ker}\,(F).$$

Donc $\mathrm{Im}\left(F^3\right) \subseteq \{0_E\}$. Réciproquement, $\{0_E\} \subseteq \mathrm{Im}\left(F^3\right)$ donc $\mathrm{Im}\left(F^3\right) = \{0_E\}$. Donc $\forall x \in E$, $F^3(x) \in \mathrm{Im}\left(F^3\right) = \{0_E\}$ et donc $F^3(x) = 0_E$. Conclusion,

$$\boxed{F^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Soient G une racine carrée de F et $\mathscr{N} = \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; G^k = 0_{\mathscr{L}(E)} \right\}$.

39. Par la question précédente, on a

$$G^6 = \left(G^2\right)^3 = F^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Donc $6 \in \mathscr{N}$ et $\mathscr{N}$ est non vide. De plus, $\mathscr{N}$ est minorée par 0 par définition. Donc $\mathscr{N}$ est non vide, minorée et incluse dans $\mathbb{N}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{N} \text{ admet un minimum.}}$$

On note $p = \min\,(\mathscr{N})$.

40. On note que $p \neq 0$ car $G^0 = \mathrm{Id}_E \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc $p-1 \in \mathbb{N}$. Puisque $p-1 < p$ et p est le minimum de $\mathscr{N}$, alors $p-1 \notin \mathscr{N}$ autrement dit $G^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Nécessairement,

$$\boxed{\exists a \in E \text{ tel que } G^{p-1}(a) \neq 0_E.}$$

41. Montrons que $\left(a, G(a), \ldots, G^{p-1}(a)\right)$ est libre. Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\lambda_0\, a + \lambda_1\, G(a) + \ldots \lambda_{p-1}\, G^{p-1}(a) = 0_E.$$

Alors, en composant par G^{p-1},

$$G^{p-1}\left(\lambda_0\, a + \lambda_1\, G(a) + \ldots \lambda_{p-1}\, G^{p-1}(a)\right) = G^{p-1}\left(0_E\right).$$

Par linéarité de G et donc de G^{p-1}

$$\lambda_0\, G^{p-1}(a) + \lambda_1\, G^p(a) + \ldots \lambda_{p-1}\, G^{2p-1}(a) = 0_E.$$

Or $p \in \mathscr{N}$ donc $G^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ puis $G^{p+1} = G \circ 0_{\mathscr{L}(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. De même, $G^{p+1} = \cdots = G^{2p-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc

$$\lambda_0\, G(a) + 0_E + \cdots + 0_E = 0_E.$$

Ou encore $\lambda_0\, G(a) = 0_E$. Or par la question précédente, $G(a) \neq 0_E$. Donc $\lambda_0 = 0$. Puis,

$$\lambda_1\, G(a) + \ldots \lambda_{p-1}\, G^{p-1}(a) = 0_E.$$

En composant par G^{p-2}, on obtient $\lambda_1\, G^{p-1}(a) + 0_E = 0_E$ et donc $\lambda_1 = 0$. En itérant, on obtient,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(a, G(a), \ldots, G^{p-1}(a)\right) \text{ est libre.}}$$

42. Par la question précédente, $\left(a, G(a), \ldots, G^{p-1}(a)\right)$ est une famille libre de $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc

$$\text{Card}\left(a, G(a), \ldots, G^{p-1}(a)\right) \leqslant \dim\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad p \leqslant 4.$$

Si $p = 4$. Alors $4 = p \in \mathscr{N}$ et donc $G^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Si $p = 3$, alors de même $G^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc en composant par G, $G^4 = G \circ G^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

De même si $p = 2$ ou $p = 1$. Dans tous les cas, $G^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Conclusion,

$$\boxed{p \leqslant 4 \quad \text{et} \quad G^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

43. Par définition, $G^2 = F$. Donc $F^2 = G^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Or on a vu que $\text{Im}\left(F^2\right) = \text{Vect}\left(I_2\right)$ donc $\text{Im}\left(F^2\right) \neq \{0_2\}$. Donc $F^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ n'admet aucune racine carrée.}}$$

Partie 6 : Un contre-exemple dans $\mathbb{R}[X]$

On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application suivante :

$$D : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'. \end{array}$$

On admet que $D \in \mathscr{L}(E)$ et on suppose que $T \in \mathscr{L}(E)$ est une racine carrée de D : $T^2 = D$.

44. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$P \in \text{Ker}(D) \qquad \Leftrightarrow \qquad D(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \qquad \Leftrightarrow \qquad P' = 0_{\mathbb{R}[X]} \qquad \Leftrightarrow \qquad P \in \mathbb{R}_0[X].$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker}(D) = \mathbb{R}_0[X] \qquad \text{et} \qquad \dim(\text{Ker}(D)) = 1.}$$

45. Par la question précédente, $D(1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Autrement dit,

$$T^2(1) = 0_{\mathbb{R}[X]} \qquad \Leftrightarrow \qquad T(T(1)) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Donc $T(1) \in \text{Ker}(T)$. Premier cas, $T(1) \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, alors $\text{Ker}(T)$ contient un vecteur non nul $(T(1))$ et donc $\text{Ker}(T) \neq \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$.

Second cas, $T(1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $1 \in \text{Ker}(T)$ et donc $\text{Ker}(T) \neq \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$.

Dans tous les cas, $\text{Ker}(T) \neq \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$ et donc

$$\boxed{T \text{ n'est pas injective.}}$$

46. Par la question 2. $\text{Ker}(T) \subseteq \text{Ker}(D)$. Donc $\text{Ker}(T) \subseteq \mathbb{R}_0[X]$. Or $\mathbb{R}_0[X]$ est de dimension finie. Donc $\text{Ker}(T)$ est de dimension finie et

$$\dim(\text{Ker}(T)) \leqslant \dim(\mathbb{R}_0[X]) = 1.$$

Or par la question précédente, $\text{Ker}(T) \neq \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$ donc $\dim(\text{Ker}(T)) \geqslant 1$. Ainsi, on a $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$. D'où

- $\text{Ker}(T) \subseteq \text{Ker}(D)$
- $\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Ker}(D))$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker}\,(T) = \text{Ker}\,(D) = \mathbb{R}_0[X].}$$

47. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $\text{Ker}\,(T^n) = \mathbb{R}_0[X]$ ».

Initialisation. Si $n = 1$, on a par la question précédente, $\text{Ker}\left(T^1\right) = \mathbb{R}_0[X]$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également. Par hypothèse de récurrence, on a $\text{Ker}\,(T^n) = \mathbb{R}_0[X]$. Montrons que $\text{Ker}\left(T^{n+1}\right) = \mathbb{R}_0[X]$. Soit $P \in \text{Ker}\left(T^{n+1}\right)$. Alors,

$$T^{n+1}(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \qquad \Leftrightarrow \qquad T^n\left(T(P)\right) = 0_{\mathbb{R}[X]} \qquad \Leftrightarrow \qquad T(P) \in \text{Ker}\,(T^n)\,.$$

Donc par hypothèse de récurrence, $T(P) \in \mathbb{R}_0[X] = \text{Ker}\,(T)$. Donc $T\left(T(P)\right) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ i.e. $T^2(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $P \in \text{Ker}\left(T^2\right) = \text{Ker}\,(D) = \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi, $\text{Ker}\left(T^{n+1}\right) \subseteq \mathbb{R}_0[X]$. Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_0[X]$, alors par la question précédente, $P \in \text{Ker}\,(T)$ et donc $T(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc en composant par T^n, $T^{n+1}(P) = T^n\left(0_{\mathbb{R}[X]}\right) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car T^n est linéaire. Donc $P \in \text{Ker}\left(T^{n+1}\right)$. D'où $\mathbb{R}_0[X] \subseteq \text{Ker}\left(T^{n+1}\right)$. Finalement,

$$\text{Ker}\left(T^{n+1}\right) = \mathbb{R}_0[X]$$

et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \text{Ker}\,(T^n) = \text{Ker}\,(T) = \mathbb{R}_0[X].}$$

48. En particulier, $\text{Ker}\left(T^4\right) = \mathbb{R}_0[X]$. Or $T^4 = \left(T^2\right)^2 = D^2 : P \mapsto D\left(D\left(P\right)\right) = D\left(P'\right) = \left(P'\right)' = P''$. Donc $\text{Ker}\left(D^2\right) = \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi, $\mathbb{R}_0[X] = \text{Ker}\left(T^4\right) = \text{Ker}\left(D^2\right) = \mathbb{R}_1[X]$. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{D \text{ n'admet aucune racine carrée.}}$$

Problème II - Dénombrement

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = [\![1;n]\!]$. On appelle partition ordonnée de E, une famille $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de $p \in [\![1;n]\!]$ sous-ensembles de E vérifiant

- $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \in \mathscr{P}(E)$ i.e. $A_i \subseteq E$,
- $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]$, $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1;p]\!]} A_i = E$,

pour laquelle l'ordre d'apparition des A_i dans la famille est important (exemple : $(\{1\},\{2,3\})$ et $(\{2,3\},\{1\})$ sont deux partitions ordonnées distinctes).
On note u_n le nombre de partitions ordonnées de E et pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, $u_{n,p}$ le nombre de partitions ordonnées de E avec exactement p sous-ensembles de E.

1. Montrer que

   (a) On suppose que $n = 1$. Alors, $E = \{1\}$. Donc E ne présente qu'une unique partition : (E). Donc

   $$\boxed{u_1 = 1.}$$

   (b) On suppose $n = 2$. Alors, $E = \{1,2\}$. Les partitions ordonnées de E sont alors

   $$(E), \quad (\{1\},\{2\}), \quad (\{2\},\{1\}).$$

   Conclusion,

   $$\boxed{u_2 = 3.}$$

   (c) On suppose $n = 3$. Alors, $E = \{1,2,3\}$. Les partitions ordonnées de E sont alors

   $$\begin{aligned}(E), \quad & (\{1\},\{2,3\}), \quad (\{2\},\{1,3\}), \quad (\{3\},\{1,2\}),\\ & (\{2,3\},\{1\}), \quad (\{1,3\},\{2\}), \quad (\{1,2\},\{3\}),\\ & (\{1\},\{2\},\{3\}), \quad (\{1\},\{3\},\{2\}),\\ & (\{2\},\{1\},\{3\}), \quad (\{2\},\{3\},\{1\}),\\ & (\{3\},\{1\},\{2\}), \quad (\{3\},\{2\},\{1\}).\end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{u_2 = 13.}$$

2. La seule partition ordonnée n'ayant qu'une seul sous-ensemble de E est (E). Donc

   $$\boxed{u_{n,1} = 1.}$$

3. Une partition ordonnée de E avec exactement n sous-ensembles de E ne contient nécessairement que des singletons. Puisque la partition est ordonnée, il faut choisir la place des n singletons. Il s'agit d'un tirage successif sans remise de n éléments parmi n ou encore d'une permutation de n éléments. Conclusion,

   $$\boxed{u_{n,n} = A_n^n = n!}$$

4. Soit $n \geqslant 3$. Pour construire une partition avec $n-1$ sous-ensembles de E, il nous faut $n-2$ singletons et un sous-ensemble à deux éléments. Construisons cet ensemble à deux éléments, il nous faut prendre, sans ordre deux éléments de E parmi les n possibles. Il s'agit d'une combinaison :
$$\binom{n}{2} \text{ possibilités.}$$
Automatiquement, les $n-2$ éléments restants de E seront mis dans des singletons. Il faut alors ordonné ces $n-1$ sous-ensembles de E : $n!$ possibilités. Donc
$$u_{n,n-1} = \binom{n}{2} n! = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} n! = \frac{n! n\,(n-1)}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{u_{n,n-1} = \frac{n! n\,(n-1)}{2}.}$$

5. Pour construire une partition ordonnée avec exactement deux sous-ensembles de E, il suffit de choisir le premier sous-ensemble A de E de la partition. Le sous-ensemble en seconde position contiendra alors automatiquement tous les éléments restants. Le second sous-ensemble est donc $\overline{A}$. Alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est bien une partition ordonnée de E. L'ensemble vide ne pouvant pas faire partie d'une partition, on doit avoir $A \neq \emptyset$ et $\overline{A} \neq \emptyset$ i.e. $A \neq E$. Donc $A \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$. Conclusion,

$\boxed{\text{construire une partition ordonnée avec exactement deux sous-ensembles de } E \text{ revient à choisir un ensemble } A \text{ dans } \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}.}$

6. Par la question précédente, on a
$$u_{n,2} = \operatorname{Card}\left(\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}\right) = \operatorname{Card}\left(\mathscr{P}(E)\right) - \operatorname{Card}\left(\{\emptyset, E\}\right) = 2^n - 2.$$
Conclusion,
$$\boxed{u_{n,2} = 2^n - 2.}$$

7. Soit $p \in [\![2; n]\!]$. On souhaite obtenir $u_{n,p}$ donc compter le nombre de partitions de E avec exactement p sous-ensembles et les exprimer en fonction de $u_{n-k,p-1}$ le nombre de partitions de $[\![1; n-1]\!]$ avec $p-1$ sous-ensembles. On commence par choisir le premier ensemble A_1 de la partition. Cette fois-ci non seulement A_1 ne doit pas être ni vide ni E mais il ne doit pas contenir non plus trop d'éléments pour pouvoir remplir les $p-1$ autres sous-ensembles de la partition. Il faut en laisser au minimum $p-1$ éléments. Donc on peut remplir A_1 avec au moins 1 élément et au plus $n-(p-1) = n-p+1$ éléments. Pour tout $k \in [\![1; n-p+1$, notons v_k le nombres de partitions ordonnées de E avec $\operatorname{Card}(A_1) = k$. On a alors,
$$u_{n,p} = \sum_{k=1}^{n-p+1} v_k.$$
Comptons v_k. Soit $k \in [\![1; n-p+1]\!]$. On commence par choisir les k éléments de A_1 : il s'agit d'un tirage simultané de k éléments parmi n : $\binom{n}{k}$. Puis, il nous reste $n-k$ éléments qu'il faut ranger en $p-1$ sous-ensembles. Autrement dit il faut construire une partition ordonnée de ces $n-k$ éléments en $p-1$ sous-ensembles : $u_{n-k,p-1}$ façons. Au total :
$$v_k = \binom{n}{k} u_{n-k,p-1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{u_{n,p} = \sum_{k=1}^{n-p+1} \binom{n}{k} u_{n-k,p-1}.}$$

8. Pour $p=2$, par la question précédente, on a
$$u_{n,2}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}u_{n-k,1}.$$
Donc par la question 2.
$$u_{n,2}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{0}-\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-2.$$
On reconnait alors un binôme de Newton, donc
$$\boxed{u_{n,2}=2^n-2.}$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{on retrouve bien le résultat de la question 6.}}$$

9. Par définition de $u_{n,p}$, on observe que
$$u_n=\sum_{p=1}^{n}u_{n,p}=u_{n,1}+\sum_{p=2}^{n}u_{n,p}=1+\sum_{p=2}^{n}u_{n,p}\qquad\text{par la question 2.}$$
Donc par la question 7.
$$u_n=1+\sum_{p=2}^{n}\sum_{k=1}^{n-p+1}\binom{n}{k}u_{n-k,p-1}.$$
Or $k\leqslant n-p+1 \Leftrightarrow p\leqslant n-k+1$. De plus la plus petite valeur possible de k est 1 et la plus grande est pour $p=2$: $n-2+1=n-1$. D'où,
$$u_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=2}^{n-k+1}\binom{n}{k}u_{n-k,p-1}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\sum_{p=2}^{n-k+1}u_{n-k,p-1}.$$
Posons $\tilde{p}=p-1$. Alors,
$$u_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\sum_{p=1}^{n-k}u_{n-k,p}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}u_{n-k}$$
Posons $\tilde{k}=n-k$, alors,
$$u_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{n-k}u_k$$
Or $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$. Conclusion,
$$\boxed{u_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}u_k.}$$

10. En prenant $n=3$ dans la question précédente, on obtient,
$$u_3=1+\sum_{k=1}^{2}\binom{3}{k}u_k=1+3u_1+3u_2.$$
Par les questions 1.a et 1.b on obtient,
$$u_3=1+3\times 1+3\times 3=1+3+9=13.$$

ça marche!! Conclusion,

$$\boxed{\text{on retrouve bien le résultat de la question 1.c } u_3 = 13.}$$

Puis, de la même façon,

$$u_4 = 1 + \sum_{k=1}^{3} \binom{4}{k} u_k = 1 + 4u_1 + 6u_2 + 4u_3 = 1 + 4 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 13 = 1 + 4 + 18 + 52 = 75.$$

Conclusion, $E = [\![1; 4]\!]$ possède

$$\boxed{u_4 = 75 \text{ partitions.}}$$

Heureusement, que le correcteur ne nous a pas demandé de les énumérer...