Réponses de l'interrogation 10
Equations différentielles d'ordre 1.

1. (a) Enoncer le principe de superposition.
Solution. Soient I un intervalle, a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I, y_1 une solution de

$$(E_1) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x)$$

et y_2 une solution de

$$(E_2) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_2(x).$$

Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de

$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

(b) Définir un problème de Cauchy.
Solution. Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur I est un problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

(c) Enoncer la formule de Moivre.
Solution. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2. Déterminer les intervalles de résolution puis sur l'un d'eux, déterminer $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à $(E) : \ln(t)y(t) + t\ln^4(t)(y'(t) + 1) = 0$ d'inconnue y une fonction dérivable.
Solution. Donc les intervalles de résolution de (E) sont

$$\boxed{I_1 =]0;1[\qquad \text{et} \qquad I_2 =]1;+\infty[.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \text{Vect}\left(\begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\frac{1}{2\ln^2(t)}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C\,e^{\frac{1}{2\ln^2(t)}} \end{array} \middle| \ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. Justifier que l'équation $(E) : y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \arctan(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto 1 + x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.
Solution. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{\arctan^2(x)}{2} + C\right)(1 + x^2) \end{array} \middle| \ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. Justifier que $f : x \mapsto \frac{2x-3}{x^2-4x+3}$ admet des primitives sur $]3;+\infty[$ et les déterminer.
Solution. Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donnée par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l}]3;+\infty[\to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \ln\left(\dfrac{(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}\right) + C \end{array} \middle| \ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. Justifier que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$ existe et calculer I à l'aide d'un changement de variable.
Solution. Conclusion,

$$\boxed{I = 2 - \frac{\pi}{2}.}$$