Correction de l'interrogation 16
Continuité, dérivabilité

1. (a) Enoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
Solution. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors les deux points suivants sont équivalents :
   i. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
   ii. pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l.

   (b) Enoncer l'identité des accroissements finis.
Solution. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

   (c) Donner la définition d'une partie majorée, minorée, bornée.
Solution. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :
$$\begin{array}{rcl} A \text{ est majorée} & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad x \leqslant M \\ A \text{ est minorée} & \Leftrightarrow & \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, \quad m \leqslant x \\ A \text{ est bornée} & \Leftrightarrow & \exists (M, m) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A, \quad m \leqslant x \leqslant M. \end{array}$$

2. (a) Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Enoncer la définition rigoureuse de « la fonction f est prolongeable par continuité en 0. » *On détaillera la définition de la limite qui apparaît.*
Solution. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si
$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]-\eta; 0[\cup]0; \eta[, \qquad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\,.$$
Dans ce cas, on pose $f(0) = \ell$ pour définir une nouvelle fonction continue en 0.

   (b) Montrer que $\lfloor x \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.
Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. Donc puisque $x > 0$,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 1 - \frac{1}{x} \leqslant \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1.$$
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$. Donc par le théorème d'encadrement,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lfloor x \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x.}$$

3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est 1-lipschitzienne sur $[1; +\infty[$.
Solution. La fonction f est définie et même dérivable sur $[1; +\infty[$ et
$$\forall t \in [1; +\infty[, \qquad f'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$
Puisque $t \geqslant 1$, alors $t^2 \geqslant 1$ donc $\frac{1}{t^2} \leqslant 1$ et ainsi,
$$\forall t \in [1; +\infty[, \qquad 0 > f'(t) = -\frac{1}{t^2} \geqslant -1.$$
Ainsi,
$$\forall t \in [1; +\infty[, \qquad 0 < |f'(t)| \leqslant 1.$$

Soient $(x,y) \in [1;+\infty[^2$, $x \neq y$. La fonction f est continue $[x;y]$ (ou $[y;x]$) et dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$) donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in]x;y[\text{ (ou }]y;x[), \ |f(x)-f(y)| = |f'(t)|\,|x-y| \leqslant |x-y|\,.$$

le résultat est encore vrai si $x=y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est 1-lipschitzienne sur } [1;+\infty[.}$$

4. Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Solution. On sait que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1 = f(0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2}.$$

Or $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o\left(x^2\right)$ et $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$. Donc

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\left(1-x^2+o\left(x^2\right)\right)x - \left(x+o\left(x^2\right)\right)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x+o\left(x^2\right)-x+o\left(x^2\right)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} o(1).$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en 0 et donc sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.}$$

5. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x + \ln(1-x)}$.

Solution. On sait que

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$
$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

Par somme,

$$\mathrm{e}^x + \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,
- Puis,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\left(-\frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right).$$
- Donc $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. D'où,

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x+\ln(1-x)} = \frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{24}+o\left(x^4\right)+o\left(x^4\right)+o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{24}+o\left(x^4\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x+\ln(1-x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\left(1+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lllll}
1 & & +\frac{x^3}{6} & +\frac{5x^4}{24} & +o\left(x^4\right) \\
 & -\frac{x^2}{2} & & & +o\left(x^4\right) \\
 & & & +\frac{x^4}{24} & +o\left(x^4\right) \\
 & & & & +o\left(x^4\right) \\
1 & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} & +\frac{x^4}{4} & +o\left(x^4\right).
\end{array}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right).}$$