Correction de l'interrogation 23
Dénombrement

1. (a) Enoncer le théorème fondamental de l'arithmétique.
Solution. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ un entier, $p_1, \ldots, p_d$ des nombres premiers, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in (\mathbb{N}^*)^d$ des entiers naturels non nuls tels que
$$n = \prod_{i=1}^{d} p_i^{\alpha_i}.$$
De plus cette décomposition est unique.
(b) Caractériser les bijections sur les ensembles finis.
Solution. Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $\varphi \in \mathscr{F}(E, F)$. Alors
$$\varphi \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est surjective.}$$
(c) Enoncer les deux formules de Taylor pour les polynômes.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ donc $\deg(P) \leqslant n$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors
$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \qquad \text{et} \qquad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

2. Un berger possède 95 moutons (brebis ou bélier, noir ou blanc). Parmi ces moutons, 63 sont noirs, 45 sont ou blancs ou brebis et 80 sont ou noirs ou béliers. Combien de moutons sont des brebis ?
Solution. On note E l'ensemble des moutons, A l'ensemble des brebis et B l'ensemble des moutons noirs. D'après l'énoncé, on a $\text{Card}(E) = 95$, $\text{Card}(B) = 63$, $\text{Card}\left(A \cup \overline{B}\right) = 45$ et $\text{Card}\left(\overline{A} \cup B\right) = 80$. On cherche $\text{Card}(A)$. Par la formule de Poincaré,
$$\text{Card}\left(A \cup \overline{B}\right) = \text{Card}(A) + \text{Card}\left(\overline{B}\right) - \text{Card}\left(A \cap \overline{B}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 45 = \text{Card}(A) + \text{Card}\left(\overline{B}\right) - \text{Card}\left(A \cap \overline{B}\right).$$
Or $\text{Card}\left(\overline{B}\right) = \text{Card}(E) - \text{Card}(B) = 95 - 63 = 32$. D'autre part, on observe que
$$\text{Card}\left(\overline{A} \cup B\right) = \text{Card}\left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) = \text{Card}(E) - \text{Card}\left(A \cap \overline{B}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 80 = 95 - \text{Card}\left(A \cap \overline{B}\right)$$
Donc $\text{Card}\left(A \cap \overline{B}\right) = 95 - 80 = 15$. Ainsi,
$$\text{Card}(A) = 45 - \text{Card}\left(\overline{B}\right) + \text{Card}\left(A \cap \overline{B}\right) = 45 - 32 + 15 = 28.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{Card}(A) = 28.}$$

3. Avec un jeu de 52 cartes (dont 4 as et 4 rois), on constitue une main (sans ordre) de 5 cartes. Déterminer le nombre de mains comprenant deux as et deux rois exactement. *On donnera la valeur numérique du résultat.*
Solution. On commence par choisir les 2 as parmi les 4 possibles, il s'agit d'un tirage simultané : $\binom{4}{2}$ choix. Puis on choisit les 2 rois parmi les 4 possibles : $\binom{4}{2}$. Enfin, il faut compléter la main en choisissant une carte qui n'est ni as ni roi : une tire donc une carte parmi les $52 - 4 - 4$ cartes ni as ni roi : 44 choix. Au total :
$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 44 = \left(\frac{4!}{2!2!}\right)^2 \times 44 = \left(\frac{24}{4}\right)^2 \times 44 = 36 \times 44 = 144 \times 11 = 1440 + 144 = 1584.$$
Conclusion,
$$\boxed{1584 \text{ mains possibles.}}$$

4. On dispose de 5 boules rouges indiscernables, 5 boules blanches indiscernables et 5 boules vertes indiscernables. On tire avec ordre 5 boules. Combien de rangements distincts présentent au plus une boule rouge ? *On donnera la valeur numérique du résultat.*

Solution. Notons A l'ensemble des rangements avec au plus une boule rouge, A_0 celui des rangements avec aucune boule rouge et A_1 celui des rangements avec exactement 1 boule rouge. On observe que

$$A = A_0 \sqcup A_1.$$

L'union étant disjointe,

$$\text{Card}\,(A) = \text{Card}\,(A_0) + \text{Card}\,(A_1)\,.$$

Pour les rangements avec aucune boule rouge : on tire successivement avec remise 5 boules parmi des boules blanches et vertes : il s'agit de la construction d'un 5-uplet avec deux issues :

$$\text{Card}\,(A_0) = 2^5 = 32.$$

Pour les rangements avec une seule boule rouge : on choisit la place de la boule rouge : 5 possibilités. Puis l'on tire dans les quatre places restantes des boules blanches ou vertes : 2^4 choix et donc au total :

$$\text{Card}\,(A_1) = 5 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$$

D'où,

$$\text{Card}\,(A) = 32 + 80 = 112.$$

Conclusion,

$$\boxed{112 \text{ rangements avec au plus une boule rouge.}}$$

5. Déterminer un équivalent en 0 en $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(1-x)+x^2} + \frac{1}{\ln(1+x)}$.
Solution. Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1-x)+x^2} + \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)+x^2}{(\ln(1-x)+x^2)\ln(1+x)}.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+x)+\ln(1-x)+x^2 &\underset{x\to0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) + x^2 \\
&\underset{x\to0}{=} -x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right) + x^2 \\
&\underset{x\to0}{=} -\frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\ln(1+x)+\ln(1-x)+x^2 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^4}{2}.$$

D'autre part, $\ln(1-x)+x^2 \underset{x\to0}{=} -x+o(x)+x^2 \underset{x\to0}{=} -x+o(x)$. Donc $\ln(1-x)+x^2 \underset{x\to0}{\sim} -x$ et $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$. Donc par produit,

$$\left(\ln(1-x)+x^2\right)\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} -x^2.$$

Finalement par quotient,

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{-x^4/2}{-x^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}.}$$