Correction de l'interrogation 24
Applications linéaires I

1. (a) Définir et caractériser une symétrie.

   Solution. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La symétrie sur F parallèlement à G est l'application

   $$s: \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}$$

   Dans ce cas $F = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$. De plus, pour $s \in \mathscr{L}(E)$, on a

   $$s \text{ symétrie} \quad \Leftrightarrow \quad s \circ s = \operatorname{Id}_E.$$

   (b) Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.

   Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors
   - f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
   - f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

   (c) Définir la somme de deux espaces vectoriels.

   Solution. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

   $$F + G = \{z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G,\ z = x + y\}.$$

2. L'application $\varphi: \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & ad - bc \end{array}$ est-elle linéaire ?

   Solution. Montrons que φ n'est pas linéaire bien que $\varphi(0_2) = 0_{\mathbb{R}}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

   $$\begin{aligned} \varphi(A) &= 1 \times 0 - 0 \times 0 = 0 \\ \varphi(B) &= 0 \times 1 - 0 \times 0 = 0 \\ \varphi(A + B) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1. \end{aligned}$$

   Donc $\varphi(A + B) \neq \varphi(A) + \varphi(B)$. Conclusion,

   $$\boxed{\varphi \text{ n'est pas linéaire.}}$$

3. On identifie polynôme et fonction polynomiale. Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \mapsto & \mathbb{R} \\ P & \to & \int_0^2 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$. On admet que f est linéaire. Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle injective ?

   Solution. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow \quad \int_0^2 a_0 + a_1 t + a_2 t^2\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3\right]_{t=0}^{t=2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2a_0 + 2a_1 + \frac{8a_2}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = -a_1 - \frac{4}{3} a_2 \\ &\Leftrightarrow \quad P = a_2 X^2 + a_1 X - -a_1 - \frac{4}{3} a_2 \\ &\Leftrightarrow \quad P = a_2\left(X^2 - \frac{4}{3}\right) + a_1 (X - 1). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(X^2 - \frac{4}{3}, X-1\right)}_{=\mathscr{B}}.}$$

La famille $\mathscr{B}$ est libre car constituée de deux polynômes non colinéaires (ou de degrés distincts) et engendre $\operatorname{Ker}(f)$ donc $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 2$.
En particulier, puisque $X - 1 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, on en déduit que $\operatorname{Ker}(f) \neq \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$ et donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$$

4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \mapsto & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} & \to & A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \end{array}$. On admet que φ est linéaire. Déterminer $\operatorname{Im}(\varphi)$.
L'application φ est-elle surjective ?

Solution. Soit $\mathscr{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Puisque $\mathscr{C}$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$ et φ linéaire, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\varphi) = \varphi(\operatorname{Vect}(\mathscr{C})) &= \operatorname{Vect}\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1. \end{array}$$

On constate que $C_2 = -2C_3$ et $C_4 = -2C_3$. On peut donc enlever C_2 et C_4 :

$$\boxed{\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}}.}$$

Les deux vecteurs de $\mathscr{B}$ n'étant pas colinéaires forment une famille libre et puisque $\mathscr{B}$ engendre $\operatorname{Im}(\varphi)$, $\mathscr{B}$ une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$. On remarque alors que $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 2 < 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Donc $\operatorname{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}^3$ et $\boxed{f \text{ n'est pas surjective.}}$

5. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^\alpha \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]$. Déterminer suivant la valeur de α la nature de $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

Solution. Posons $u = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \underbrace{\ln(1+u) - \ln(1 + \arctan(u))}_{=f(u)}.$$

On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$f(u) \underset{u \to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right) - \ln\left(1 + u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)\right).$$

Posons $v = u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

- $v \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$
- Puis,
$$v^2 \underset{u\to 0}{=} \left(u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)\right)^2 = u^2 + o\left(u^3\right).$$
- Aussi,
$$v^3 \underset{u\to 0}{=} u^3 + o\left(u^3\right).$$
- Enfin,
$$o\left(v^3\right) \underset{u\to 0}{=} o\left(u^3\right).$$

Or $\ln(1+v) \underset{v\to 0}{=} v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + o\left(v^3\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)\right) &\underset{u\to 0}{=} \ln(1+v) \\
&\underset{u\to 0}{=} u \quad -\tfrac{u^3}{3} \quad +o\left(u^3\right) \\
&\qquad -\tfrac{u^2}{2} \quad +o\left(u^3\right) \\
&\qquad +\tfrac{u^3}{3} \quad +o\left(u^3\right) \\
&\qquad +o\left(u^3\right) \\
&\underset{u\to 0}{=} u - \tfrac{u^2}{2} + o\left(u^3\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(u) &\underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right) - \left(u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^3\right)\right) \\
&\underset{u\to 0}{=} \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$u_n = n^\alpha f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^\alpha\left(\frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{3n^{3-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3-\alpha}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^{3-\alpha}}.$$

Or pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{3n^{3-\alpha}} > 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n^{3-\alpha}}$ ont même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n^{3-\alpha}}$ est une série de Riemann. Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n^{3-\alpha}} \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad 3-\alpha > 1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 2.}$$