Correction de l'interrogation 25
Applications linéaires II

1. (a) Comparer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée suivant la nature de l'application linéaire.
   Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
   - Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
   - Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
   - Si f est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$.

   (b) Caractériser les isomorphismes en dimension finie.
   Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si deux des points suivants sont vrais
   - $\dim(E) = \dim(F)$
   - f est injective
   - f est surjective

   Alors f est un isomorphisme.

   (c) Enoncer le théorème de la base adaptée.
   Solution. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors,
   - $F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est libre.
   - $F + G = E \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est génératrice dans E.
   - $F \oplus G = E \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est une base de E.

2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a+b+c+2d \\ b-c+d \\ a-b+3c \end{bmatrix} \end{array}$. On admet que $f \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3\right)$. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f.

Solution. **Méthode 1, par le noyau.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker}(f) \quad & \Leftrightarrow \quad f(M) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c+2d = 0 \\ b-c+d = 0 \\ a-b+3c = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c+2d = 0 \\ b-c+d = 0 \\ -2b+2c-2d = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c+2d = 0 \\ b-c+d = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -b-c-2d = -c+d-c-2d = -2c-d \\ b = c-d \end{cases} .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} -2c-d & c-d \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_K} .
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_K$ est libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires et engendre $\operatorname{Ker}(f)$ donc $\mathscr{B}_K$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Ainsi,

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2.$$

De plus, $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Donc par le théorème du rang :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2 \qquad \text{et} \qquad \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2.}$$

Méthode 2, par l'image. Notons $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Puisque $\mathscr{C}$ engendre $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que f est linéaire, on a

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(\mathscr{C})) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1 \end{array} \\
&= \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_I} && \text{car } C_2 = C_4 = -C_3
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_I$ car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et $\mathscr{B}_I$ engendre $\operatorname{Im}(f)$ donc $\mathscr{B}_I$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$. Ainsi,

$$\operatorname{rg}(f) = 2.$$

De plus, $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Donc par le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) - \operatorname{rg}(f) = 4 - 2 = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2 \qquad \text{et} \qquad \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2.}$$

3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.

Solution. **Méthode 1, par l'injectivité.** Montrons que f est injective. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad (P(1), P(2), P(3)) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad P(1) = P(2) = P(3) = 0_{\mathbb{R}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1, 2 \text{ et } 3 \text{ sont des trois racines dictinctes de } P
\end{aligned}$$

Or $\deg(P) \leqslant 2$. Nécessairement,

$$P \in \operatorname{Ker}(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}.$$

D'où,

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}.$$

Donc f est injective. Or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{festunisomorphisme.}$$

Méthode 2, par l'image. La famille $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de l'espace de départ (base canonique). Donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X), f\left(X^2\right)\right) = \operatorname{Vect}((1,1,1), (1,2,3), (1,4,9)).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}((1,1,1),(0,1,2),(0,3,8)) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\
&= \operatorname{Vect}((1,1,1),(0,1,2),(0,0,2)) && C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2 \\
&= \operatorname{Vect}((1,1,1),(0,1,2),(0,0,1)) && C_3 \leftarrow \frac{1}{2}C_3 \\
&= \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3 \end{array} \\
&= \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) && C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\
&= \mathbb{R}^3 \qquad \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Donc f est surjective. Or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{festunisomorphisme.}$$

4. Soient (E, F, G) trois espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $h = g \circ f$. On suppose g injective. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(h)$.
Solution. Montrons que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(h)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors, $f(x) = 0_F$. Donc en composant par g,

$$\begin{aligned}
& g(f(x)) = g(0_F) = 0_G \qquad \text{car } g \text{ est linéaire} \\
\Leftrightarrow \quad & h(x) = 0_G \\
\Leftrightarrow \quad & x \in \operatorname{Ker}(h).
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour $x \in \operatorname{Ker}(f)$ quelconque, on en déduit que $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(h)$.
Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(h)$. Alors, $h(x) = 0_G$ i.e. $g(f(x)) = 0_G$. Donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$. Or g est injective par hypothèse. Donc $\operatorname{Ker}(g) = \{0_F\}$ et donc $f(x) = 0_F$ i.e. $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Ceci étant vrai pour $x \in \operatorname{Ker}(h)$ quelconque, on en déduit que $\operatorname{Ker}(h) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(h).}$$

5. Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f = 3\mathrm{Id}_E + g$ et $g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que f est injective.
Solution. Montrons que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_E$. Or $f = 3\mathrm{Id}_E + g$. Donc $0_E = 3x + g(x)$ ou encore $g(x) = -3x$. Donc

$$\begin{aligned}
g^2(x) = g(-3x) &= -3g(x) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\
&= -3(-3x) && \text{car } g(x) = -3x \\
&= 9x.
\end{aligned}$$

Or $g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc $0_E = 9x$ i.e. $x = 0_E$ et ainsi $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est injective.}}$$

On pourrait dire que g est nilpotente d'ordre 2 et en posant $h = \frac{1}{3}Id_E - \frac{1}{9}g$, on observe que $h \circ f = f \circ g = Id_E$ et donc f est même bijective et $f^{-1} = h = \frac{1}{3}Id_E - \frac{1}{9}g$. Donc f est un automorphisme.