Interrogation 24 d'entrainement
Applications linéaires I

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir une application linéaire.
   1.2 Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.
   1.3 Définir et caractériser une projection.
   1.4 Définir et caractériser une symétrie.
   1.5 Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.
   1.6 Définir les termes suivants : isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
   1.7 Que dire de l'ensemble $\mathrm{GL}(E)$?
   1.8 Quel est l'apéritif préféré de l'algébriste ?

   Révisions

   1.8 Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
   1.9 Définir la somme de deux espaces vectoriels.
   1.10 Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
   1.11 Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
   1.12 Enoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.

2. **Déterminer si une application est linéaire.**
   2.1 L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P'' - 5P + 7 \end{array}$ est-elle linéaire ?
   2.2 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. L'application $\tau: \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \tau(f) : (t \mapsto f(t+a)) \end{array}$ est-elle linéaire ?
   2.3 L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x^2)}{2} \end{array}$ est-elle linéaire ?
   2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (AMB)^T \end{array}$ est-elle linéaire ?
   2.5 Soit $B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ un polynôme non nul. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\varphi(P)$ le reste dans la division euclidienne de P par B. L'application φ est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$?

3. **Calculer un noyau.**
   3.1 Déterminer le noyau de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & \begin{pmatrix} x-2y+z \\ 2x-y-2z \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si f est injective.
   3.2 Déterminer le noyau de $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f'' - 12f' + 18f \end{array}$ et préciser si f est injective.
   3.3 Déterminer le noyau de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \\ P & \mapsto & (P', P(0)) \end{array}$ et préciser si f est injective.
   3.4 Déterminer le noyau de $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : (x \mapsto xf(x)) \end{array}$ et préciser si φ est injective.
   3.5 Déterminer le noyau de $f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si f est injective.

4. **Calculer une image.**

4.1 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)) \end{array}$ et préciser si f est surjective.

4.2 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \frac{M+M^T}{2} \end{array}$ et préciser si f est surjective.

4.3 Déterminer l'image de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ et préciser si f est surjective.

4.4 Déterminer l'image de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : (t \mapsto \mathrm{e}^t f(t)) \end{array}$ et préciser si φ est surjective.

4.5 Déterminer l'image de $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et préciser si f est surjective.

5. **Séries numériques à paramètre**

5.1 Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de p la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(np+3)}$.

5.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de α la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} - 1$.

5.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de α la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

On pourra admettre que pour tout $\alpha > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

5.4 Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de a la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$.

5.5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de α la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(n)\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.