

## Interrogation 25 d'entraînement

### Applications linéaires II

#### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Que dire de l'image d'une famille par une application linéaire ? (Prop II.5)
- 1.2 Caractériser une application linéaire suivant l'image d'une base. (Prop II.6)
- 1.3 Comparer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée suivant la nature de l'application linéaire.
- 1.4 Définir le rang.
- 1.5 Énoncer le théorème du rang.
- 1.6 Caractériser les isomorphismes en dimension finie.
- 1.7 Pourquoi le narcissisme entraîne l'égoïsme ? (Vous avez 4h.)

#### Révisions

- 1.8 Définir et caractériser une famille libre.
- 1.9 Définir et caractériser une famille liée.
- 1.10 Définir une famille génératrice.
- 1.11 Définir et caractériser une base.
- 1.12 Énoncer le théorème de la base adaptée.

#### 2. Appliquer le théorème du rang.

- 2.1 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Déterminer la dimension du noyau et de l'image de  $\text{Tr}$ .

$$\mathbb{R}_{2n}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$$

- 2.2 Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f : P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n a_{2k} X^k$ . On admet que  $f$  est bien définie et linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de  $f$ .

- 2.3 Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto AM - MA$ . On admet que  $f$  est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de  $f$ .

- 2.4 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension du noyau de  $f$  ?

- 2.5 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^{kt}$ . On définit dans  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , l'espace  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . On admet que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $F$ . On pose enfin

$$\begin{aligned} \varphi : F &\rightarrow F \\ f &\mapsto f'' - 7f' + 10f. \end{aligned}$$

On admet que  $\varphi$  est bien définie et est linéaire. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de  $\varphi$ .

**3. Appliquer la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.**

3.1 Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{matrix}$ . On admet que  $f$  est linéaire. Montrer que  $f$  est un automorphisme.

3.2 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \\ x_2 + 2x_3 + \dots + (n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n \\ x_n \end{bmatrix} \end{matrix}$ . On admet que  $f$  est linéaire. Montrer que  $f$  est un automorphisme.

3.3 Dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on pose  $E = \text{Vect}(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ . On admet que  $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$  forme une base de  $E$ . On définit également  $\varphi : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & f' \end{matrix}$ . On admet que  $\varphi$  est bien définie. Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme.

3.4 Soit  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (a, b) & \mapsto & a + bj \end{matrix}$ , où on rappelle que  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . On admet que  $f$  est linéaire. Montrer que  $f$  est un isomorphisme.

3.5 Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1), P''(1), \dots, P^{(n)}(1)) \end{matrix}$ . On admet que  $f$  est bien définie et linéaire. Montrer que  $f$  est un isomorphisme.

**4. Manipulation théorique des applications linéaires.**

4.1 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ . Montrer que  $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$ .

4.2 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer que  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \{0_E\}$ .

4.3 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $u$  un projecteur de  $E$ . Montrer que  $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ .

4.4 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $g \circ f = \text{Id}_E$ . Montrer que  $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$ .

4.5 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $g(\text{Ker}(f)) \subseteq \text{Ker}(f)$ .

**5. En vrac (et un peu plus dur)**

5.1 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Montrer que  $f \in \text{GL}(E)$ , que  $p = 3\text{Id}_E - f$  et  $q = f - 2\text{Id}_E$  sont des projecteurs et que leurs noyaux sont en somme directe.

5.2 Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = -\text{Id}_E$ . Montrer que  $f \in \text{GL}(E)$ . Que dire de  $f^4$ ? Montrer que pour tout  $u \in E \setminus \{0_E\}$ ,  $(u, f(u))$  est libre.

5.3 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ . Montrer que  $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ .

5.4 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $f \circ g - g \circ f = f$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n$ .

5.5 Soient  $E$  un espace vectoriel et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ . Montrer que  $g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) + \text{Im}(f)$ .