Correction de l'interrogation 25 d'entrainement
Applications linéaires II

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

- Si f est injective et $\mathscr{F}$ libre alors $f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \dots, f(u_n))$ est libre.
- Si f est surjective et $\mathscr{F}$ est génératrice dans E alors $f(\mathscr{F})$ est génératrice dans F.
- Si f est un isomorphisme et $\mathscr{F}$ une base de E alors $f(\mathscr{F})$ est une base de F.

1.2 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
- f est surjective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de F.
- f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une base de F.

1.3 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
- Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
- Si f est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$.

1.4 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors le rang de f est défini par

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

1.5 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors,

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E).$$

1.6 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si deux des points suivants sont vrais

- $\dim(E) = \dim(F)$
- f est injective
- f est surjective

Alors f est un isomorphisme.

1.7 Plus un individu à une haute image de lui-même moins il a de coeur (à prononcer avec l'accent du nord), et ce indépendamment de son rang social.

2. **Appliquer le théorème du rang.**

2.1 On sait que la trace est linéaire et donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Donc

$$0 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) \leqslant \dim(\mathbb{R}) = 1.$$

Ainsi $\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = 0$ ou 1. Or $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$ et donc la trace n'est pas identiquement nulle et son rang est donc non nul. Par conséquent $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Par le théorème du rang, on en déduit que

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathrm{Tr}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1.}$$

2.2 *Méthode 1.* Calculons $\operatorname{Im}(f)$. Puisque $\left(1, X, X^2, \ldots, X^{2n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X), \ldots, f\left(X^{2n}\right)\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(1, 0, X, 0, X^2, \ldots, 0, X^n\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)\\ &= \mathbb{R}_n[X].\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1.$$

Puis, par le théorème du rang,

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) - \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2n+1-(n+1) = n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(f)) = n+1 \qquad \text{et} \qquad \dim(\operatorname{Ker}(f)) = n.}$$

Méthode 2. Calculons $\operatorname{Ker}(f)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n} a_{2k} X^k$. On a

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}\\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^k = 0_{\mathbb{R}_n[X]}\\ &\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0; n]\!],\ a_{2k} = 0_{\mathbb{R}} \qquad \text{par unicité des coefficients des polynômes}\\ &\Leftrightarrow \quad P = a_1 X + a_3 X^3 + \cdots + a_{2n-1} X^{2n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(X, X^3, \ldots, X^{2n-1}\right).$$

Posons $\mathscr{B} = \left(X, X^3, \ldots, X^{2n-1}\right)$. La famille $\mathscr{B}$ est échelonnée en ses coordonnées donc est libre. Par ce qui précède $\mathscr{B}$ engendre $\operatorname{Ker}(f)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Donc

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}) = n.$$

Puis par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2n+1-n = n+1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(f)) = n+1 \qquad \text{et} \qquad \dim(\operatorname{Ker}(f)) = n.}$$

2.3 *Méthode 1 : par le noyau.* Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(M) = 0_2\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = 0_2\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} = 0_2\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c-b=0 \\ d-a=0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=c \\ a=d \end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Les matrices n'étant pas colinéaires, $\mathscr{B}$ est libre. Or $\mathscr{B}$ engendre $\mathrm{Ker}\,(f)$ donc est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 2$. Puis par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 2.}$$

Méthode 2 : par l'image. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} f(M) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

NB : Cela revient aussi à calculer les images de la base canonique.
On observe que $C_4 = -C_1$ et $C_2 = -C_3$. On peut donc enlever C_4 et C_2 :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Posons $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$. Les matrices n'étant pas colinéaires, $\mathscr{B}$ est libre. Or $\mathscr{B}$ engendre $\mathrm{Im}\,(f)$ donc est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Donc $\mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 2$. Puis par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) == \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 2.}$$

2.4 Puisque f est linéaire, $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Donc

$$0 \leqslant \mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}) = 1.$$

Par conséquent, on a deux cas :

- $\mathrm{rg}\,(f) = 0$ et la fonction f est nulle. Dans ce cas $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathbb{R}^n$ et donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n}$.
- $\mathrm{rg}\,(f) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Or $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$ et f est surjective. Par le théorème du rang, on en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \mathrm{rg}(f) = n-1}$. On dit que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

2.5 Puisque pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $e_k \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (qui est un espace vectoriel) on en déduit bien que $F \subseteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $f \in F$ en particulier $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a alors

$$f \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ est solution de l'équation } (E) \quad f'' - 7f' + 10f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Soit (E_c) : $r^2 - 7r + 10$ l'équation caractéristique associée d'inconnu $r \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant associé à (E_c).

$$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0.$$

Donc les solutions de (E_c) sont $\frac{7-3}{2} = 2$ et $\frac{7+3}{2} = 5$. Donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{5t} \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2t} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{5t} \end{array} \right) = \mathrm{Vect}\left(e_2, e_5\right).$$

Attention a priori on résout (E) dans l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et rien ne nous indique au départ que ces éléments seront tous dans le noyau de φ. Ici puisque $e_2 \in F$ et $e_5 \in F$, on en déduit que $\mathscr{S}$ est bien un sous-espace vectoriel de F et donc toutes les solutions de (E) sont dans le noyau. Conclusion :

$$\mathrm{Ker}\left(\varphi\right) = \mathscr{S} = \mathrm{Vect}\left(e_2, e_5\right).$$

Or e_2 et e_5 ne sont pas colinéaires et donc forment une base de $\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)$. On en déduit que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) = 2.$$

Or $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F (admis) et donc $\dim\left(F\right) = \mathrm{Card}\left(e_1, \ldots, e_n\right) = n$. Ainsi, par le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\right) = \dim\left(F\right) - \mathrm{rg}\left(\varphi\right) = n - 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim\left(\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\right) = n - 2 \qquad \text{et} \qquad \dim\left(\mathrm{Ker}\left(\varphi\right)\right) = 2.}$$

NB : il est possible de déterminer l'image de φ. En effet, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\varphi\left(e_k\right) = k^2 e_k - 7k e_k + 10 e_k = \left(k^2 - 7k + 10\right) e_k.$$

Or $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F. Donc

$$\mathrm{Im}\left(f\right) = \mathrm{Vect}\left(f\left(e_1\right), \ldots, f\left(e_n\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(4e_1, \ldots, \left(n^2 - 7n + 10\right) e_n\right).$$

Or si $k = 2$ ou 5, $k^2 - 7k + 10 = 0$. Donc

$$\mathrm{Im}\left(f\right) = \mathrm{Vect}\left(4e_1, -2e_3, -2e_4, 4e_6, \ldots, \left(n^2 - 7n + 10\right) e_n\right).$$

De plus, pour tout $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{2,5\}$, $k^2 - 7k + 10 \neq 0$ donc par les opérations $C_k \leftarrow C_k / \left(k^2 - 7k + 10\right)$ pour tout $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{2,5\}$, ce qui ne modifie pas l'espace engendré, on obtient

$$\mathrm{Im}\left(f\right) = \mathrm{Vect}\left(e_1, e_3, e_4, e_6, e_7, \ldots, e_{n-1}, e_n\right).$$

La famille obtenue est une sous-famille de $(e_1, \ldots, e_n)$ est est donc libre et forme une base de $\mathrm{Im}\left(f\right)$. On retrouve bien que $\mathrm{rg}\left(f\right) = n - 2$.

3. **Appliquer la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.**

3.1 *Méthode 1.* Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}\left(f\right) \quad \Leftrightarrow \quad Au = 0_{\mathbb{R}^3} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad u = 0_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et f est injective. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie égale à 3. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

Méthode 2. Puisque $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\right) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow \frac{1}{2}C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{2}C_3 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow -(C_1 - C_2 - C_3)
\end{aligned}$$

On reconnaît la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}) = \mathbb{R}^3.$$

Donc f est surjective. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie égale à 3. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

3.2 *Méthode 1.* Soit $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}\,(f) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0 \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n = 0 \\ x_n = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système obtenu est échelonné en ligne avec un pivot à chaque ligne et donc en remontant le système on obtient nécessairement $x_n = 0$, $x_{n-1} = 0$, $x_{n-2} = 0$, $\ldots$, $x_1 = 0$. Donc $0_{\mathbb{R}^n}$ est l'unique solution. Ainsi

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Donc f est injective. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie n. Donc les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on conclut que f est bijective :

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

Méthode 2. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} + 2x_n \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)}_{\mathscr{B}}\end{aligned}$$

Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \cdots + n\,\lambda_n = 0 \\ \lambda_2 + \cdots + (n-1)\,\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases}.$$

En remontant ce système échelonné, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$. Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre. Or $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et donc génératrice de $\mathbb{R}^n$. Ainsi,

$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^n.$$

Donc f est surjective. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie n. Donc les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on conclut que f est bijective :

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

3.3 *Méthode 1.* Puisque $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de E, on en déduit que

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}(\varphi(\cos), \varphi(\sin), \varphi(\operatorname{ch}), \varphi(\operatorname{sh})) = \operatorname{Vect}(-\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\varphi) &= \operatorname{Vect}(\cos, -\sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh},) && \begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ C_3 \leftrightarrow C_4 \end{array} \\ &= \operatorname{Vect}(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh},) && C_2 \leftarrow -C_2 \\ &= E.\end{aligned}$$

Donc φ est surjective *(et on note au passage que f est bien un endomorphisme puisque $\operatorname{Im}(f) \subseteq E$)*. Or φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie ($\dim(E) = 4$ car $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ en est une base). Conclusion, par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } E,\ \varphi \in \operatorname{GL}(E).}$$

Méthode 2. Soit $f \in E$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f = a\cos + b\sin + c\operatorname{ch} + d\operatorname{sh}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(f) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(a\cos + b\sin + c\operatorname{ch} + d\operatorname{sh}) = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \quad a\,\varphi(\cos) + b\,\varphi(\sin) + c\,\varphi(\operatorname{ch}) + d\,\varphi(\operatorname{sh}) = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} && \text{par linéarité de } \varphi \\ &\Leftrightarrow \quad -a\sin + b\cos + c\operatorname{sh} + d\operatorname{ch} = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \quad b\cos + (-a)\sin + d\operatorname{ch} + c\operatorname{sh} = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Or $\mathscr{B} = (\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est libre. Donc

$$f \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad b = -a = d = c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0_E.$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{0_E\}$ et φ est injective. Or φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie ($\dim(E) = 4$ car $(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ en est une base). Conclusion, par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } E,\ \varphi \in \mathrm{GL}\,(E).}$$

Bonus : la famille $\mathscr{B} = (\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ *est bien libre. En effet, soit* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^4$ *tel que*

$$\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin + \lambda_3 \mathrm{ch} + \lambda_4 \mathrm{sh} = 0_E.$$

Alors, au voisinage de 0*, on obtient :*

$$\lambda_1 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) + \lambda_2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \lambda_3 \left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) + + \lambda_4 \left(x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x \to 0}{=} 0.$$

Autrement dit,

$$\lambda_1 + \lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_4)\, x + (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{x^2}{2} + (\lambda_4 - \lambda_2) \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \underset{x \to 0}{=} 0.$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 2\,\lambda_3 = 0 \\ 2\,\lambda_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Conclusion, $\mathscr{B}$ *est libre.*

3.4 *Méthode 1.* Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} (a, b) \in \mathrm{Ker}\,(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f\,(a, b) = 0_{\mathbb{C}} \quad &&\Leftrightarrow \quad a + bj = 0 \\ & &&\Leftrightarrow \quad \underbrace{a - \frac{b}{2}}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} b}_{\in \mathbb{R}} = 0 \\ & &&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} b = 0 \end{cases} \\ & &&\Leftrightarrow \quad a = b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Donc f est injective. Or $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Conclusion, par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}}$$

Méthode 2. On sait que $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donc

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) = \mathrm{Vect}\,\underbrace{(1, j)}_{= \mathscr{B}_I}.$$

La famille $\mathscr{B}_I$ est libre car 1 et j ne sont pas $\mathbb{R}$-colinéaires (mais sont $\mathbb{C}$-colinéaires !). De plus $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_I) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Donc $\mathscr{B}_I$ est une base de $\mathbb{C}$. D'où

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{C}.$$

On pouvait aussi faire des opérations élémentaires. Donc f est surjective. Or $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Conclusion, par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie,

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}}$$

3.5 *Méthode 1.* Déterminons le noyau de f. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(P(1), P'(1), P''(1), \dots, P^{(n)}\right) = (0, 0, \dots, 0) \\ &\Leftrightarrow \quad P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(n)}(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \text{ est une racine de multiplicité au moins } n+1 \text{ de } P. \end{aligned}$$

Or par hypothèse $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est de degré au plus n. Donc P possède plus de racines (comptées avec multiplicité) que son degré. Ainsi,

$$P \in \operatorname{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$ et par suite f est injective. Or $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = n+1$. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en conclut que

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un isomorphisme.}}$$

4. **Manipulation théorique des applications linéaires.**

4.1 Soit $x \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = g \circ f(y) = g(f(y))$. Donc en posant $z = f(y)$, on a $x = g(z)$. Donc $x \in \operatorname{Im}(g)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im}(g).}$$

4.2 Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$. Alors $(u - \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E$ i.e. $u(x) - x = 0_E$ et donc $u(x) = x$. En composant par u, on obtient que $u^2(x) = u(x)$. Or $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc

$$0_E = u^2(x) = u(x).$$

Or on a vu que $u(x) = x$. Donc $x = u(x) = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque découlant du fait que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ soit un sous-espace vectoriel, on en conclut que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = \{0_E\}.}$$

4.3 Soit $x \in \operatorname{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On compose par u pour obtenir alors que $u(x) = u^2(y)$. Or on sait par hypothèse que u est un projecteur i.e. $u^2 = u$. Donc

$$u(x) = u^2(y) = u(y).$$

Or par construction, $u(y) = x$ et donc $u(x) = u(y) = x$. Ainsi, $u(x) - x = 0_E$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E).}$$

4.4 Soit $x \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$. Puisque $x \in \operatorname{Im}(f)$, on sait qu'il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Mais on sait également que $x \in \operatorname{Ker}(g)$. Donc $0_E = g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y)$. Par hypothèse, $g \circ f = \operatorname{Id}_E$. Donc $0_E = y$ et par suite, $x = f(y) = f(0_E) = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque découlant du fait que $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel (intersection de deux sous-espaces vectoriels), on conclut que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}.}$$

4.5 Soit $x \in g(\operatorname{Ker}(f))$. Donc il existe $y \in \operatorname{Ker}(f)$ tel que $x = g(y)$. En composant par f, on obtient que

$$f(x) = f \circ g(y).$$

Or $f \circ g = g \circ f$, donc $f(x) = g \circ f(y)$. Mais puisque $y \in \operatorname{Ker}(f)$, on a $f(y) = 0_E$ et donc $f(x) = g(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{g(\operatorname{Ker}(f)) \subseteq \operatorname{Ker}(f).}$$

5. **En vrac (et un peu plus dur)**

5.1 Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Alors, on observe que

$$f^2 - 5f = -6\mathrm{Id}_E \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{6}f^2 + \frac{5}{6}f = \mathrm{Id}_E.$$

Donc par linéarité de f,

$$f \circ \left(-\frac{1}{6}f + \frac{5}{6}\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Id}_E = \left(-\frac{1}{6}f + \frac{5}{6}\mathrm{Id}_E\right) \circ f.$$

Donc $\boxed{f \text{ est inversible et donc un automorphisme de } E}$ et $f^{-1} = -\frac{1}{6}f + \frac{5}{6}\mathrm{Id}_E$.
On calcule :

$$p^2 = (3\mathrm{Id}_E - f) \circ (3\mathrm{Id}_E - f) = 9\mathrm{Id}_E - 6f + f^2 \qquad \text{car } f \text{ et } \mathrm{Id}_E \text{ commutent.}$$

Or par définition, $f^2 = 5f - 6\mathrm{Id}_E$. Donc

$$p^2 = 9\mathrm{Id}_E - 6f + 5f - 6\mathrm{Id}_E = 3\mathrm{Id}_E - f = p.$$

De plus, $p \in \mathscr{L}(E)$ en tant que somme d'endomorphisme. Donc $\boxed{p \text{ est un projecteur.}}$
De même,

$$q^2 = (f - 2\mathrm{Id}_E)^2 = f^2 - 4f + 4\mathrm{Id}_E = 5f - 6\mathrm{Id}_E - 4f + 4\mathrm{Id}_E = f - 2\mathrm{Id}_E = q.$$

Or $q \in \mathscr{L}(E)$ en tant que somme d'endomorphisme. Donc $\boxed{q \text{ est un projecteur.}}$
Enfin, soit $x \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Alors $x \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$ et donc

$$0_E = (f - 3\mathrm{Id}_E)(x) = f(x) - 3x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = 3x.$$

De même, $x \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et donc

$$0_E = (f - 2\mathrm{Id}_E)(x) = f(x) - 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = 2x.$$

Ainsi, $3x = f(x) = 2x \Leftrightarrow x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq \{0_E\}$. Or on a également $\{0_E\} \subseteq \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ (en tant que sous-espace vectoriel). Conclusion, $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$:

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \text{ et } \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \text{ sont en somme directe.}}$$

5.2 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Alors, on a

$$f \circ (-f) = (-f) \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Donc $\boxed{f \text{ est un automorphisme}}$ et $f^{-1} = -f$. De plus, on a $f^4 = (-\mathrm{Id}_E)^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f^4 \in \mathscr{L}(E)$. Donc $\boxed{f^4 \text{ est une symétrie}}$.
Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. Posons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda u + \mu f(u) = 0_E. \qquad (1)$$

Alors en composant par f, on a également

$$\lambda f(u) + \mu f^2(u) = f(0_E) = 0_E \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

Or $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ donc

$$-\mu u + \lambda f(u) = 0_E. \qquad (2)$$

En faisant $\lambda(1) - \mu(2)$, on trouve

$$\left(\lambda^2 + \mu^2\right) u = 0_E$$

Or $u \neq 0_E$, donc $\lambda^2 + \mu^2 = 0_{\mathbb{R}}$. Or λ^2 et μ^2 sont deux réels positifs donc $\lambda = \mu = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall u \in E \setminus \{0_E\}, \qquad (u, f(u)) \text{ est libre.}}$$

5.3 Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
Soit $x \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$. Alors il existe $y \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que $x = f(y)$. En particulier

$$x \in \operatorname{Im}(f).$$

De plus $y \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ donc $g \circ f(y) = 0_E$. Or $x = f(y)$ donc

$$0_E = g(f(y)) = g(x) \qquad \text{i.e.} \qquad x \in \operatorname{Ker}(g).$$

Ainsi $x \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$. On a donc montré que

$$f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) \subseteq \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f).$$

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$. Alors d'une part $g(x) = 0_E$ et d'autre part, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Ainsi

$$0_E = g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y).$$

Donc $y \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et comme $x = f(y)$, on a bien

$$x \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f)).$$

On a donc montré également que $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) \subseteq f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$. Conclusion,

$$\boxed{f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f).}$$

5.4 Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = f$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n): \qquad \text{« } f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n. \text{ »}$$

Démontrons cette propriété par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$, alors on a $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et donc

$$f^n \circ g - g \circ f^n = \mathrm{Id}_E \circ g - g \circ \mathrm{Id}_E = g - g = 0_{\mathscr{L}(E)} = 0_{\mathbb{K}} \times \mathrm{Id}_E = 0 \times f^0.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n.$$

En composant par f, qui est linéaire, on a

$$f \circ (f^n \circ g - g \circ f^n) = f \circ (nf^n) \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{n+1} \circ g - f \circ g \circ f^n = nf^{n+1}.$$

Attention f et g ne commutent pas a priori. Cependant par hypothèse on sait que $f \circ g - g \circ f = f$ donc $f \circ g = f + g \circ f$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g - (f + g \circ f) \circ f^n = nf^{n+1} \qquad &\Leftrightarrow \qquad f^{n+1} \circ g - f^{n+1} + g \circ \circ f^{n+1} = nf^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \qquad f^{n+1} \circ g + g \circ \circ f^{n+1} = (n+1) f^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n \circ g - g \circ f^n = nf^n.}$$

5.5 Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
Attention ! On ne dit absolument pas que g est inversible, dans $g^{-1}(Im(g \circ f))$ on désigne l'image réciproque de $Im(g \circ f)$.
Soit $x \in g^{-1}(\operatorname{Im}(g \circ f))$ i.e. $g(x) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Donc il existe $y \in E$ tel que

$$g(x) = g \circ f(y) = g(f(y)).$$

Merci à l'aimable auditoire de ne pas simplifier abusivement, on n'a jamais dit que g était injective. Posons $x_1 = f(y)$ et $x_2 = x - f(y)$. Alors

- $x_1 = f(y) \in \mathrm{Im}\,(f)$.
- $g\,(x_2) = g(x) - g\,(f(y))$ car g est linéaire. Donc par ce qui précède, $g\,(x_2) = 0_E$ i.e. $x_2 \in \mathrm{Ker}\,(g)$.
- $x_1 + x_2 = x - f(y) + f(y) = x$.

On en déduit donc que $x \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in g^{-1}\,(\mathrm{Im}\,(g \circ f))$, on en déduit que

$$g^{-1}\,(\mathrm{Im}\,(g \circ f)) \subseteq \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)\,.$$

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)$. Alors il existe $x_1 \in \mathrm{Im}\,(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Puisque $x_1 \in \mathrm{Im}\,(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x_1 = f(y)$ et donc $x_2 = x - x_1 = x - f(y)$. Or $x_2 \in \mathrm{Ker}\,(g)$. Donc

$$0_E = g\,(x_2) = g\,(x - f(y)) = g(x) - g\,(f(y)) \qquad \text{car } g \text{ est linéaire.}$$

Donc $g(x) = g\,(f(y)) = g \circ f(y)$. Ainsi $g(x) \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$ et donc $x \in g^{-1}\,(\mathrm{Im}\,(g \circ f))$. On a donc aussi montré que $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) \subseteq g^{-1}\,(\mathrm{Im}\,(g \circ f))$. Conclusion,

$$\boxed{g^{-1}\,(\mathrm{Im}\,(g \circ f)) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g)\,.}$$