Correction de l'interrogation 26 d'entrainement Intégration

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathscr{E}([a;b]),\ \forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

1.2 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Si

- f est positive sur $[a;b]$
- d'intégrale nulle : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Alors $f = 0$ sur $[a;b]$.

1.3 *(Enoncée ici pour $\mathbb{K}$ un corps quelconque $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)* Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{K})$. Puisque $a < b$ alors on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1.4 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b])^2$. Puisque f est continue, $\sup_{z\in[a;b]}|f(z)|$ existe dans $\mathbb{R}$. De plus, puisque $a < b$,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{z\in[a;b]}|f(z)| \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1.5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(I)$, $a \in I$ et $A \in \mathbb{R}$. Alors la fonction

$$F: \quad \begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

existe, est continue et même $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F(a) = A$.

1.6 Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a;b])$. Alors,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \sup_{z\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(z)\right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1.7 Rien à voir avec l'apéro et des verres remplis plus haut que le bord. Etre un trois demis c'est vouloir intégrer l'X (surnom de polytechnique) avant la fin de sa deuxième année c'est-à-dire entre sa première et sa deuxième année. Or tout le monde sait (inutile d'avoir fait polytechnique justement pour le savoir) qu'intégrer x entre 1 et 2 donne

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

De même pour le cinq demis qui doit intégrer l'X entre la deuxième et la fin de sa troisième année,

$$\int_2^3 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Et pour une fois, ce n'est même pas vraiment une blague, du moins c'est une blague officielle qui n'est pas de moi. ;)

2. **Encadrer une intégrale.**

2.1 Soit $a > 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{e}^{-t^n} \leqslant 1$ et $1 + 2t^n \geqslant 1$ donc
$$\forall t \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t^n}}{1+2t^n} \leqslant 1.$$
Or par l'inégalité triangulaire car $a > 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|I_n| \leqslant \int_1^a \left| \frac{\mathrm{e}^{-t^n} \cos\left(\sqrt{t}\right) \ln(t)}{1+2t^n} \right| \mathrm{d}t = \int_1^a \frac{\mathrm{e}^{-t^n} \left|\cos\left(\sqrt{t}\right)\right| |\ln(t)|}{1+2t^n} \mathrm{d}t.$$
Donc
$$|I_n| \leqslant \int_1^a \left|\cos\left(\sqrt{t}\right)\right| |\ln(t)| \,\mathrm{d}t \qquad \leftarrow \text{indépendant de } n$$
En posant $M = \int_1^a \left|\cos\left(\sqrt{t}\right)\right| |\ln(t)| \,\mathrm{d}t$, on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|I_n| \leqslant M$$
et donc $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$

NB : on pouvait aussi continuer de majorer M :
$$\begin{aligned} M = \int_1^a \left|\cos\left(\sqrt{t}\right)\right| |\ln(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^a |\ln(t)| \,\mathrm{d}t &= \int_1^a \ln(t) \,\mathrm{d}t \qquad \textit{car } t \geqslant 1 \\ &= [t\ln(t) - t]_{t=1}^{t=a} \\ &= a\ln(a) - a + 1 \\ &\leqslant a\ln(a) + 1. \end{aligned}$$

2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0;1]$, on a $1 + t \geqslant 1$ et donc
$$0 \leqslant \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t} \leqslant \mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right).$$
Méthode 1. Par croissance de l'intégrale car $0 < 1$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right) \mathrm{d}t = \left[n\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = n\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$$
Or
$$n\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$
Méthode 2. La fonction sh est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $t \in [0;1]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leqslant \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t} \leqslant \mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right) \leqslant \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right).$$
Donc par croissance de l'intégrale car $0 < 1$,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}t = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$
NB : on a même montré que $I_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

2.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [n; n^2]$, $0 \leqslant t^5 \leqslant n^{10}$ et donc $0 \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} t^5 \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} n^{10}$. Par croissance de l'intégrale car $n \leqslant n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_n^{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} n^{10} \,\mathrm{d}t = n^{10} \left[-\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}}\right]_{t=n}^{t=n^2} = n^{10}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{-\frac{n}{\sqrt{n}}} - \mathrm{e}^{-\frac{n^2}{\sqrt{n}}}\right) = n^{10}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} - \mathrm{e}^{-n^{3/2}}\right).$$

Par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^{10}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} - \mathrm{e}^{-n^{3/2}}\right) = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

2.4 Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}([0; a])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$0 \leqslant \arctan\left(\mathrm{e}^{nt} + 2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt} + 3\right) \leqslant \frac{\pi}{2}(1+3) = 2\pi.$$

Donc par l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale car $0 < a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|I_n| \leqslant \int_0^a \left|\arctan\left(\mathrm{e}^{nt} + 2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt} + 3\right) f(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^a 2\pi\,|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Posons $M = 2\pi \int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t$ qui est bien un réel indépendant de n. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |I_n| \leqslant M$$

i.e. $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$

*NB : on pouvait continuer la majoration de M. Puisque f est **continue** sur le **segment** $[0; a]$ elle est aussi bornée (et atteint ses bornes) et donc $A = \sup_{z\in[0;a]} |f(z)|$ existe dans $\mathbb{R}$. Par croissance de l'intégrale car $0 < a$,*

$$M = 2\pi \int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi \int_0^a A\,\mathrm{d}t = 2\pi a A.$$

2.5 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \geqslant 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left[\frac{1}{n}; 1\right]$, on a

$$\frac{\mathrm{ch}(t)}{t} \geqslant \frac{1}{t}.$$

Donc par croissance de l'intégrale car $\frac{1}{n} < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_{t=\frac{1}{n}}^{t=1} = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n).$$

Or $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc par minoration, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$$

3. **Sommes de Riemann.**

3.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 1]$. Or on reconnait une somme de Riemann d'ordre n de f sur $[0; 1]$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^n f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right).$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}.}$$

3.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Posons $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right).$$

On reconnait une somme de Riemann. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|1+t^2\right|\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\ln(2)}{2}.}$$

3.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}.$$

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right).$$

On reconnait donc une somme de Riemann. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2t}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+2t}\right]_{t=0}^{t=1} = \sqrt{3}-1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}-1.}$$

3.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Posons $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right).$$

On reconnait donc une somme de Riemann et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1-\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [t-\arctan(t)]_{t=0}^{t=1} = 1-\frac{\pi}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1-\frac{\pi}{4}.}$$

3.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Donc on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(n+1)\times\cdots\times(2n)}{n^n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right).$$

On reconnait donc une somme de Riemann. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $s = 1+t$, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_1^2 \ln(s)\,\mathrm{d}s = [s\ln(s) - s]_{s=1}^{s=2} = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$. Donc par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{2\ln(2)-1} = 4\,\mathrm{e}^{-1}.}$$

4. **Théorème fondamental de l'analyse.**

4.1 Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\arccos(tx)\,\mathrm{d}t$. Soit $x \in [-1;0[\cup]0;1]$, alors pour tout $t \in [0;1]$, $tx \in [-1;1]$ donc $\arccos(tx)$ est bien définie. Plus précisément, $t \mapsto \arccos(tx)$ est continue sur $[0;1]$. De plus $t \mapsto \mathrm{e}^{tx}$ est aussi continue sur $[0;1]$. Donc $\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\arccos(tx)\,\mathrm{d}t$ est bien définie. Donc pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$, $\varphi(x)$ existe. De plus par le changement de variable $s = tx \Leftrightarrow t = \frac{s}{x}$, on a pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$,

$$\varphi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^s \arccos(s)\frac{\mathrm{d}s}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{e}^s\arccos(s)\,\mathrm{d}s.$$

On sait que la fonction $s \mapsto \mathrm{e}^s\arccos(s)$ est continue sur $[-1;1]$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^s\arccos(s)\,\mathrm{d}s$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$ et pour tout $x \in [-1;1]$, $F'(x) = \mathrm{e}^x\arccos(x)$ (F est l'unique primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x\arccos(x)$ s'annulant en 0). Avec cette notation, on a

$$\forall x \in [-1;0[\cup]0;1], \qquad \varphi(x) = \frac{F(x)}{x}.$$

Donc en tant que quotient de deux fonctions $\mathscr{C}^1$, la fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;0[\cup]0;1]$ et pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$,

$$\boxed{\varphi'(x) = \left(\frac{F(x)}{x}\right)' = \frac{F'(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(x\,\mathrm{e}^x\arccos(x) + \int_0^x \mathrm{e}^s\arccos(s)\,\mathrm{d}s\right).}$$

Bonus : pour tout $x \in [-1;1]$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{tx}\arccos(tx)$ est continue sur $[-1;1]$. Donc φ est bien définie sur $[-1;1]$ et notamment en 0.(Attention le changement de variable $s = tx$ n'est pas légitime pour $x = 0$.) De plus, on a par définition de φ,

$$\varphi(0) = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\times 0}\arccos(t\times 0)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or par ce qui précède, on sait également que pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$,

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{x}.$$

où F est l'unique primitive de $s \mapsto \mathrm{e}^s\arccos(s)$ s'annulant en 0. Notamment $F(0) = 0$ et donc

$$\forall x \in [-1;0[\cup]0;1], \qquad \varphi(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

On reconnait alors le taux d'accroissement de F en 0. Or F étant la primitive de $s \mapsto \mathrm{e}^s\arccos(s)$ sur $[-1;1]$, F est dérivable sur $[-1;1]$ et notamment en 0. Donc φ admet une limite en 0 et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi(x) = F'(0) = \mathrm{e}^0\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \varphi(0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \textit{ n'est pas continue en } 0.}$$

4.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}([0;1])$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto (1+tx)^n f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\varphi(x)$ existe. Ainsi φ est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus par la formule du binôme de Newton puis la linéarité de l'intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (tx)^k f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \underbrace{\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{indépendant de } x}$$

On observe alors que φ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ et est donc $\mathscr{C}^\infty$. En particulier, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} \int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier,

$$\varphi'(0) = \binom{n}{1} \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = n \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \varphi'(0) = n \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

4.3 Soit $f : t \mapsto \sqrt{\mathrm{sh}(t)}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) \text{ existe } \Leftrightarrow \mathrm{sh}(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0.$$

Donc f est définie et même continue sur $[0;+\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$, de ce qui précède, on en déduit que

$$\varphi(x) \text{ existe } \Leftrightarrow [x+1; \mathrm{e}^x] \subseteq \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x+1 \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{e}^x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1.$$

Donc φ est définie sur $[-1;+\infty[$. Posons $F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \sqrt{\mathrm{sh}(t)}$ est continue sur $[0;+\infty[$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $F'(x) = \sqrt{\mathrm{sh}(x)}$. De plus pour tout $x \geqslant -1$,

$$\varphi(x) = \int_0^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x+1} \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = F(\mathrm{e}^x) - F(x+1).$$

Donc φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;+\infty[$ en tant que composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \geqslant -1$,

$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^x F'(\mathrm{e}^x) - F'(x+1) = \mathrm{e}^x \sqrt{\mathrm{sh}(\mathrm{e}^x)} - \sqrt{\mathrm{sh}(x+1)}.$$

Conclusion, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x \geqslant -1, \quad \varphi'(x) = \mathrm{e}^x \sqrt{\mathrm{sh}(\mathrm{e}^x)} - \sqrt{\mathrm{sh}(x+1)}.}$$

NB : par son expression ci-dessus, il apparait que φ' est dérivable et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ et donc φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$. Notez cependant que la racine carrée n'étant pas dérivable en 0, φ' n'est pas dérivable en -1 et donc φ n'est pas deux fois dérivable en -1.

4.4 La fonction $f : t \mapsto \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)$ est définie, continue et positive sur $[0;1]$. Donc par le théorème fondamentale de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$,

$$F'(x) = \mathrm{ch}(x)\arcsin(x).$$

En particulier la fonction F' est strictement positive sur $]0;1]$ et donc F est strictement croissante sur $]0;1]$. Par continuité en 0, F est strictement croissante sur $[0;1]$ et donc pour tout $x \in]0;1]$, $F(x) > F(0) = 0$. Donc F est strictement positive sur $]0;1]$. Donc par composition, $x \mapsto F(3x)$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement positive sur $]0;1/3]$. Or pour tout $x \in]0;1/3]$,

$$\varphi(x) = \ln\left(\int_0^{3x} \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\,\mathrm{d}t\right) = \ln(F(3x)).$$

Conclusion, φ est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1/3]$ et

$$\boxed{\forall x \in]0;1/3], \quad \varphi'(x) = \frac{3F'(3x)}{F(3x)} = \frac{3\,\mathrm{ch}(3x)\arcsin(3x)}{\int_0^{3x} \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\,\mathrm{d}t}.}$$

4.5 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [2;3]$. On a

$$(tx)^{tx} = \mathrm{e}^{tx\ln(tx)} \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad tx > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > 0.$$

Donc pour tout $x > 0$, $t \mapsto (tx)^{tx}$ est définie et continue sur $[2;3]$. Donc pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \int_2^3 (tx)^{tx}\,\mathrm{d}t$ existe i.e. φ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le changement de variable $s = tx$, on a

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \int_{2x}^{3x} \mathrm{e}^{s\ln(s)}\,\frac{\mathrm{d}s}{x}.$$

On pose $F : x \mapsto \int_1^x \mathrm{e}^{s\ln(s)}\,\mathrm{d}s$. La fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{s\ln(s)}$ est continue sur $]0;+\infty[$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $F'(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. De plus pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}.$$

Conclusion, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{3F'(3x) - 2F(2x)}{x} - \frac{F(3x) - F(2x)}{x^2} = \frac{3\,\mathrm{e}^{3x\ln(3x)} - 2\,\mathrm{e}^{2x\ln(2x)}}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}.}$$

5. **Inégalité de Taylor-Lagrange**

5.1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ est $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;x]$, donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \sup_{z\in[0;x]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(t) = 2^k\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Donc $f^{(k)}(0) = 2^k$ et pour tout $t \in [0;x]$, on a $0 \leqslant \mathrm{e}^{2t} \leqslant \mathrm{e}^{2x}$ par croissance de la fonction exponentielle. Donc pour tout $z \in [0;x]$, $\left|f^{(n+1)}(z)\right| \leqslant 2^{n+1}\,\mathrm{e}^{2x}$. Conclusion,

$$\boxed{\left| \mathrm{e}^{2x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!} \right| \leqslant \mathrm{e}^{2x}\,\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

5.2 Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ est $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;x]$, donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \sup_{z\in[0;x]} \left| f^{(2n+1)}(z) \right| \frac{|x-0|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f^{(2k)}(t) = (-1)^k\cos(t) \qquad \text{et} \qquad f^{(2k+1)}(t) = (-1)^{k+1}\sin(t).$$

Donc $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ et pour tout $t \in [0;x]$,

$$\left| f^{(2n+1)}(z) \right| = \left| (-1)^{n+1}\sin(z) \right| \leqslant 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k+1)}(0)x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \Leftrightarrow \quad & \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} - 0 \right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

5.3 Soient $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et $f : t \mapsto \tan(t)$. La fonction f est $\mathscr{C}^3$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2\right| \leqslant \sup_{z\in[0;x]}\left|f^{(3)}(z)\right| \frac{|x-0|^3}{(3)!}$$

Or pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 + \tan^2(t) \\ f''(t) &= 2\left(1+\tan^2(t)\right)\tan(t) = 2\tan(t) + 2\tan^3(t) \\ f'''(t) &= 2\left(1+\tan^2(t)\right) + 6\tan^2(t)\left(1+\tan^2(t)\right) = 2 + 8\tan^2(t) + 6\tan^4(t). \end{aligned}$$

Donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, et par croissance de la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on a pour tout $z \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$,

$$0 \leqslant f^{(3)}(z) = 2 + 8\tan^2(z) + 6\tan^4(z) \leqslant 2 + 8 + 6 = 16.$$

Conclusion,

$$\boxed{|\tan(x) - x| \leqslant 16\frac{|x|^3}{6!} = \frac{8x^3}{3}.}$$

5.4 Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est définie et même $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0; x]$, donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \sup_{z\in[0;x]}\left|f^{(n+1)}(z)\right| \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or par récurrence, pour tout $k \in [\![0; n+1]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^k k!}{(1+t)^{k+1}}.$$

Donc pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $f^{(k)}(0) = (-1)^k k!$ et pour tout $z \in [0; x]$, $\left|f^{(n+1)}(z)\right| = \frac{(n+1)!}{|1+z|^{n+2}}$. Pour tout $z \geqslant 0$, $1 + z \geqslant 1$, $|1+z|^{n+2} = (1+z)^{n+2} \geqslant 1$ et donc $\left|f^{(n+1)}(z)\right| \leqslant (n+1)!$. Ainsi,

$$\left|\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{k!}x^k\right| \leqslant (n+1)!\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left|\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right| \leqslant x^{n+1}.}$$

Voilà une méthode bien tordue d'obtenir finalement cette inégalité car en reconnaissant une somme géométrique de raison $-x \neq 1$ (car $-x \leqslant 0$), on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

et donc

$$\left|\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right| = \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1}.$$

5.5 Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $a < b$ et $f : t \mapsto \mathrm{ch}(t)$. La fonction f est définie et même $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a; b]$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|\mathrm{ch}(a) - \sum_{k=0}^{2n}\frac{\mathrm{ch}^{(k)}(b)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \sup_{z\in[a;b]}\left|\mathrm{ch}^{(2n+1)}(z)\right| \frac{|b-a|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in [\![0; n]\!]$,

$$f^{(2k)}(t) = \mathrm{ch}(t) \qquad \text{et} \qquad f^{(2k+1)}(t) = \mathrm{sh}(t).$$

Par croissance de la fonction sh sur $\mathbb{R}$, pour tout $z \in [a;b]$,

$$0 \leqslant \mathrm{sh}(a) \leqslant \mathrm{ch}^{(2n+1)}(z) = \mathrm{sh}(z) \leqslant \mathrm{sh}(b).$$

Donc $\sup_{z\in[a;b]} \sup_{z\in[a;b]} \left|\mathrm{ch}^{(2n+1)(z)}\right| \leqslant \mathrm{sh}(b)$. Ainsi,

$$\left|\mathrm{ch}(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{ch}^{(2k)}(b)}{(2k)!}(b-a)^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{ch}^{(2k+1)}(a)\,(b-a)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \mathrm{sh}(b)\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Conclusion,

$$\boxed{\left|\mathrm{ch}(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{ch}(a)\,(b-a)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{sh}(a)\,(b-a)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \mathrm{sh}(b)\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

Donc par la formule de Taylor-Reste intégral,

$$\begin{aligned}
f(b) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(a)\,(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(a)\,(b-a)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k+1)}(a)\,(b-a)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{ch}(a)\,(b-a)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{sh}(a)\,(b-a)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction sh sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in [a;b]$,

$$0 \leqslant \mathrm{sh}(a) \leqslant \mathrm{sh}(t) \leqslant \mathrm{sh}(b).$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $a \leqslant b$ et la positivité de $(b-t)^{2n}$, on a

$$0 \leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{sh}(b)\int_a^b \frac{(b-t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}(b)\left[-\frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]_{t=a}^{t=b} = \mathrm{sh}(b)\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left|\mathrm{ch}(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{ch}(a)\,(b-a)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{sh}(a)\,(b-a)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \mathrm{sh}(b)\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$