Exponentielles en base a - Correction

II Activité : construction fonctionnelle

On considère l'équation (E) suivante dont l'inconnue est une *fonction* f définie sur $\mathbb{R}$:

$$(E) \qquad : \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Partie 1 : Stricte positivité des solutions non nulles

On montre dans cette partie que si f n'est pas la solution identiquement nulle, alors f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Soit f une solution de (E).

1. On suppose que la fonction f s'annule en un point fixé $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $y = t - x$. Alors, $t = x + y$. Alors, par l'équation (E),

$$f(t) = f(x+y) = f(x)f(y) = 0 \times f(y) = 0.$$

Ceci étant vrai pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque, on conclut que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = 0.}$$

On suppose maintenant que la fonction f ne s'annule en aucun point :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) \neq 0.$$

On pose $a = f(1) \in \mathbb{R}^*$.

2. Prenons $x = y = 0$. Alors, par l'équation (E),

$$f(0) = f(0+0) = f(x+y) = f(x)f(y) = f(0)f(0) = f(0)^2.$$

Donc $f(0) = f(0)^2$. Or $f(0) \neq 0$ car la fonction f ne s'annule en aucun point (important de le préciser). Donc, en divisant par $f(0) \neq 0$,

$$1 = f(0).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = 1.}$$

3. Posons $x = y = \frac{1}{2}$. Alors, toujours par l'équation (E),

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f(x+y) = f(x)f(y) = f\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Donc

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Or $a = f(1)$. Conclusion,

$$\boxed{a = f\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Donc notamment $a \geqslant 0$. De plus, on sait que f ne s'annule en aucun point. Donc $a = f(1) =\neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{a > 0.}$$

4. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $x = \frac{t}{2}$ et $y = \frac{t}{2}$. Alors par l'équation (E),

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = f(x+y) = f(x)f(y) = f\left(\frac{t}{2}\right) f\left(\frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = f\left(\frac{t}{2}\right)^2.}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, puisque $f(t)$ est un carré, $f(t) \geqslant 0$. Or on a supposé également que $f(t) \neq 0$ car la fonction f ne s'annule pas. Donc $f(t) > 0$. Ceci étant vrai pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) > 0.}$$

Partie 2 : Détermination de f sur $\mathbb{Q}$.

On montre dans cette partie que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = a^x$.

5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(nx_0)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} = f((n+1)x_0) = f(nx_0 + x_0)$$

Posons $x = nx_0$ et $y = x_0$. Alors par l'équation (E),

$$u_{n+1} = f(x+y) = f(x)f(y) = f(nx_0) f(x_0) = u_n f(x_0).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(x_0) u_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = f(x_0).}$$

(b) Par la question précédente, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0 = f(x_0)^n f(0 \times x_0) = f(x_0)^n f(0).$$

Or par la question 2 $f(0) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx_0) = f(x_0)^n \qquad \textbf{(1)}}$$

(c) Pour $x_0 = 1$ dans la question précédente, on a directement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = f(1)^n.$$

Or $f(1) = a$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = a^n.}$$

6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $x = t$ et $y = -t$. Alors par, (E),

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \Leftrightarrow \quad f(t-t) = f(t)f(-t) \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = f(t)f(-t).$$

Par la question 2 $f(0) = 1$. Donc

$$1 = f(t)f(-t).$$

Or par hypothèse, la fonction f ne s'annule pas. Donc $f(t) \neq 0$. Conclusion, en divisant par $f(t)$:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(-t) = \frac{1}{f(t)}.}$$

7. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Premier cas, $p \geqslant 0$ et donc $p \in \mathbb{N}$. Donc par la question 5c $f(p) = a^p$.
Second cas, $p \leqslant 0$. Posons $n = -p$. Alors $n \geqslant 0$ et donc $n \in \mathbb{N}$. Donc par la question 5c
$$f(n) = a^n \quad \Leftrightarrow \quad f(-p) = a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$
Par la question précédente avec $t = p$, on obtient donc
$$\frac{1}{f(p)} = \frac{1}{a^p}.$$
Donc dans ce cas on a aussi $f(p) = a^p$.
Conclusion, dans tous les cas,
$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) = a^p.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \neq 0$. Posons $x_0 = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$. Donc par **(1)**
$$f(nx_0) = f(x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f\left(n\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = f\left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad a = f\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$
Donc
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{1/n}.$$
Ceci étant vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On conclut que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{1/n}.}$$

9. Soit $q \in \mathbb{Z}^*$. Premier cas, $q > 0$, alors $q \in \mathbb{N}^*$. Donc par la question précédente, $f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{1/q}$.
Deuxième cas, $q < 0$. Posons $n = -q$. Alors $n > 0$ et donc $n \in \mathbb{N}^*$. Donc par la question précédente,
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{1/n} \quad \Leftrightarrow \quad f\left(-\frac{1}{q}\right) = a^{-1/q} = \frac{1}{a^{1/q}}.$$
Donc par la question 6 avec $t = \frac{1}{q}$, on obtient,
$$f(-t) = \frac{1}{a^{1/q}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f(t)} = \frac{1}{a^{1/q}} \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = a^{1/q}.$$
Donc $f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{1/q}$. Conclusion, dans tous les cas,
$$\boxed{\forall q \in \mathbb{Z}^*, \quad f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{1/q}.}$$

10. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. Premier cas, si $p \geqslant 0$. Posons $x_0 = \frac{1}{q}$ et $n = p$. Alors par **(1)**,
$$f(nx_0) = f(x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f\left(p\frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p.$$
Par la question précédente, $f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{1/q}$. Donc
$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(a^{1/q}\right)^p = a^{p/q}.$$
Deuxième cas, si $p \leqslant 0$. Posons $x_0 = \frac{1}{q}$ et $n = -p$, alors $n \in \mathbb{N}$. Par **(1)**,
$$f(nx_0) = f(x_0)^n \quad \Leftrightarrow \quad f\left(-p\frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^{-p} \quad \Leftrightarrow \quad f\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{q}\right)^p}.$$

Posons $t = \frac{p}{q}$. Par la 6 on obtient

$$\frac{1}{f\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{1}{f\left(\frac{1}{q}\right)^p} \qquad \Leftrightarrow \qquad f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p.$$

Par la question précédente, $f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{1/q}$. Donc, on retrouve dans ce cas également,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(a^{1/q}\right)^p = a^{p/q}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall q \in \mathbb{Z}^*, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{p/q}.}$$

Ou encore $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = a^x$.

Partie 3 : Et l'exponentielle dans tout cela ?

On montre dans cette partie que si f est dérivable en 0 et vérifie $f'(0) = 1$, alors nécessairement $f = \exp$.
On rappelle que, par définition, la fonction exponentielle est l'unique fonction $f = \exp$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
On suppose toujours f une solution non nulle de (E). On suppose de plus que f est dérivable en 0.

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.
    (a) Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Par (E) avec $y = h$, on a

    $$f(x+h) = f(x+y) = f(x)f(y) = f(x)f(h).$$

    Donc
    $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(x)\left(f(h) - 1\right)}{h}$$

    Conclusion,
    $$\boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - 1}{h}.}$$

    (b) On sait que f est dérivable en 0. Donc par définition,

    $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ existe et vaut } f'(0).$$

    Or par la question 2 $f(0) = 1$. Donc
    $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h) - 1}{h} = f'(0).$$

    Donc par produit, comme $f(x)$ est constant,

    $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(x)\frac{f(h) - 1}{h} \text{ existe et vaut } f(x)f'(0).$$

    Donc par la question précédente,

    $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe et vaut } f(x)f'(0).$$

    Conclusion, $\boxed{f \text{ est dérivable en } x}$ et
    $$\boxed{f'(x) = f(x)f'(0).}$$

12. Supposons $f'(0) = 1$. Par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x).$$

Donc

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- $f' = f$
- $f(0) = 1$.

Or seule la fonction exponentielle vérifie ces trois propriétés. Conclusion,

$$\boxed{f = \exp.}$$

IV Exercices

Exercice 1.

13. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A = \left(a^{x+1}\right)^3 a^{-x-3} = a^{3(x+1)}a^{-x-3} = a^{3x+3}a^{-x-3} = a^{3x+3-x-3} = a^{2x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = a^{2x}.}$$

14. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$B = \frac{a^{-2x+1}}{a^{-x+1}} = a^{-2x+1-(-x+1)} = a^{-2x+1+x-1} = a^{-x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{B = a^{-x}.}$$

15. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$C = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} + \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} + \frac{\frac{1}{a^x} - 1}{\frac{1}{a^x} + 1} = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} + \frac{\frac{1-a^x}{a^x}}{\frac{1+a^x}{a^x}} = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} + \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = \frac{a^x - 1 + 1 - a^x}{1 + a^x} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{C = 0.}$$

16. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$D = \sqrt{a^{-2x} + \frac{2}{a^x} + 1} = \sqrt{\left(a^{-x}\right)^2 + 2a^{-x} + 1}.$$

On reconnait une identité remarquable. Donc

$$D == \sqrt{\left(a^{-x} + 1\right)^2}.$$

Or $a > 0$ et donc $a^{-x} + 1 > 0$ *Important ! ! En effet,* $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$.
Donc

$$D = a^{-x} + 1 = \frac{1}{a^x} + 1 = \frac{1 + a^x}{a^x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{D = \frac{1 + a^x}{a^x}.}$$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a^{-x} - 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^{-x} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-x\ln(a)} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -x\ln(a) = \ln(2) \qquad \text{car } 2 > 0. \end{aligned}$$

Premier cas, si $a = 1$, alors l'équation est équivalente à

$$0 = \ln(2) \qquad \text{impossible.}$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_1 = \emptyset.$$

Deuxième cas, $a \neq 1$, alors $-\ln(a) \neq 0$. Donc

$$a^{-x} - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{\ln(2)}{\ln(a)}.$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_a = \left\{-\frac{\ln(2)}{\ln(a)}\right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_a = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a = 1 \\ \left\{-\frac{\ln(2)}{\ln(a)}\right\} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a^{3x+1} - a^{-x} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^{3x+1} < a^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{(3x+1)\ln(a)} < \mathrm{e}^{-x\ln(a)} \\ &\Leftrightarrow \quad (3x+1)\ln(a) < -x\ln(a) \qquad \text{par la stricte croissance de la fonction exp} \\ &\Leftrightarrow \quad (4x+1)\ln(a) < 0. \end{aligned}$$

Premier cas, $a < 1$. Alors $\ln(a) < 0$. Donc

$$a^{3x+1} - a^{-x} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x+1 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > -\frac{1}{4}.$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_a = \left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[.$$

Deuxième cas, $a = 1$, $\ln(a) = 0$ et donc $(4x+1)\ln(a) = 0$. Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_1 = \emptyset.$$

Troisième cas, $a > 1$, $\ln(a) > 0$. Donc

$$a^{3x+1} - a^{-x} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x+1 < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -\frac{1}{4}.$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_a = \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_a = \begin{cases} \left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[& \text{si } a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a = 1 \\ \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[& \text{si } a > 1. \end{cases}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = a^x$. On a les équivalences suivantes :

$$a^{2x} + 2a^x \leqslant 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad (a^x)^2 + 2a^x - 3 \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2 + 2X - 3 \leqslant 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4 + 12 = 16 = 4^2$. Donc les racines associées sont $\frac{-2+4}{2} = 1$ et $\frac{-2-4}{2} = -3$. Or le signe d'un trinôme est celui du coefficient de x^2 en dehors des racines. Donc

$$a^{2x} + 2a^x \leqslant 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -3 \leqslant X \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad -3 \leqslant a^x \leqslant 1.$$

Or $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)} > 0$. Donc

$$\begin{aligned} a^{2x} + 2a^x \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x\ln(a)} \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x\ln(a) \leqslant \ln(1) \qquad \text{par la croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow \quad x\ln(a) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Si $a<1$, alors $\ln(a)<0$ et donc $x\ln(a)\leqslant 0 \iff x\geqslant 0$.
Si $a=1$, alors $\ln(a)=0$ et donc $x\ln(a)\leqslant 0$ est vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Si $a>1$, alors $\ln(a)>0$ et donc $x\ln(a)\leqslant 0 \iff x\leqslant 0$.
Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_a=\begin{cases}[0;+\infty[& \text{si } a<1\\ \mathbb{R} & \text{si } a=1\\ ]-\infty;0] & \text{si } a>1.\end{cases}}$$

4. Soit $x\in\mathbb{R}$. Commençons par déterminer le domaine de définition de l'équation. On a

$$a^x-3=0 \iff a^x=3 \iff \mathrm{e}^{x\ln(a)}=3 \iff x\ln(a)=\ln(3).$$

Premier cas, $a=1$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $a^x-3=1-3=-2\neq 0$ et l'inéquation devient

$$\frac{2a^x-3}{a^x-3}<\frac{1}{2} \iff \frac{2-3}{1-3}<\frac{1}{2} \iff \frac{-1}{-2}<\frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}<\frac{1}{2} \text{ impossible.}$$

Dans ce cas, $\mathscr{S}_1=\emptyset$.
Supposons désormais que $a\neq 1$. Alors,

$$a^x-3=0 \iff x=\frac{\ln(3)}{\ln(a)}.$$

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\ln(3)}{\ln(a)}\right\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{2a^x-3}{a^x-3}<\frac{1}{2} &\iff \frac{2a^x-3}{a^x-3}-\frac{1}{2}<0\\ &\iff \frac{4a^x-6-(a^x-3)}{2\left(a^x-3\right)}<0\\ &\iff \frac{3a^x-3}{2\left(a^x-3\right)}<0\\ &\iff \frac{3}{2}\frac{a^x-1}{a^x-3}<0\\ &\iff \frac{a^x-1}{a^x-3}<0 \qquad \text{car } 3/2>0.\end{aligned}$$

Posons $X=a^x$. On a alors,
$$\frac{2a^x-3}{a^x-3}<\frac{1}{2} \iff \frac{X-1}{X-3}<0.$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$X-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$X-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{X-1}{X-3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Donc

$$\begin{aligned}\frac{2a^x-3}{a^x-3}<\frac{1}{2} &\iff 1<X<3\\ &\iff 1<\mathrm{e}^{x\ln(a)}<3\\ &\iff \ln(1)<x\ln(a)<\ln(3) \qquad \text{par la stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^*\\ &\iff 0<x\ln(a)<\ln(3).\end{aligned}$$

Si $a<1$, alors $\ln(a)<0$ et donc $\frac{2a^x-3}{a^x-3}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x>\frac{\ln(3)}{\ln(a)} \end{cases} \Leftrightarrow 0>x>\frac{\ln(3)}{\ln(a)}$ *(possible car* $\frac{\ln(3)}{\ln(a)}<0$*).*

Si $a>1$, alors $\ln(a)>0$ et donc $\frac{2a^x-3}{a^x-3}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<x<\frac{\ln(3)}{\ln(a)}$ *(possible car* $\frac{\ln(3)}{\ln(a)}>0$*).*

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_a=\begin{cases} \left]\frac{\ln(3)}{\ln(a)};0\right[& \text{si } a<1 \\ \emptyset & \text{si } a=1 \\ \left]0;\frac{\ln(3)}{\ln(a)}\right[& \text{si } a>1. \end{cases}}$$

Exercice 3.

1. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Si $a=1$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $a^{3-x}=\mathrm{e}^{(3-x)\ln(a)}=\mathrm{e}^0=1$. Supposons $a\neq 1$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a toujours $a^{3-x}=\mathrm{e}^{(3-x)\ln(a)}$. On observe que

$$\lim_{x\to+\infty} 3-x=-\infty.$$

Or, $\ln(a)<0$ si $a<1$ et $\ln(a)>0$ si $a>1$. Par produit, on obtient donc,

$$\lim_{x\to+\infty}(3-x)\ln(a)=\begin{cases} -\infty & \text{si } a>1 \\ +\infty & \text{si } a<1. \end{cases}$$

Or $\lim_{u\to+\infty}\mathrm{e}^u=+\infty$ et $\lim_{u\to-\infty}\mathrm{e}^u=0$. Par composition,

$$\lim_{x\to+\infty}a^{3-x}=\begin{cases} 0 & \text{si } a>1 \\ -\infty & \text{si } a<1. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}a^{3-x}=\begin{cases} 0 & \text{si } a>1 \\ 0 & \text{si } a=1 \\ -\infty & \text{si } a<1. \end{cases}}$$

2. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $a^{2x}=\mathrm{e}^{2x\ln(a)}$ et $a^x=\mathrm{e}^{x\ln(a)}$. Premier cas, $a>1$. Alors, $\ln(a)>0$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\ln(a)}=\lim_{u\to+\infty}\mathrm{e}^u=+\infty.$$

De même,

$$\lim_{x\to+\infty}a^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x\ln(a)}=\lim_{u\to+\infty}\mathrm{e}^u=+\infty.$$

On obtient une « forme indéterminée ». Factorisons donc notre quotient par les termes prépondérants. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*+$, on a

$$\frac{a^{2x}+2}{a^x-1}=\frac{a^{2x}}{a^x}\frac{1+2a^{-2x}}{1-a^{-x}}=a^x\frac{1+2a^{-2x}}{1-a^{-x}}.$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty}a^{-2x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x\ln(a)}=\lim_{u\to-\infty}\mathrm{e}^u=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}a^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x\ln(a)}=\lim_{u\to-\infty}\mathrm{e}^u=0.$$

Donc par somme et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2a^{-2x}}{1-a^{-x}}=1.$$

Par produit,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{2x}+2}{a^x-1}=\lim_{x\to+\infty}a^x\frac{1+2a^{-2x}}{1-a^{-x}}=+\infty\times 1=+\infty.$$

Deuxième cas, si $a=1$, alors, $a^x-1=1-1=0$ et la fraction n'est définie nulle part et donc au voisinage de $+\infty$.

Troisième cas, si $a < 1$, alors, $\ln(a) < 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x \ln(a)} = \lim_{u \to -\infty} \mathrm{e}^u = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} a^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x \ln(a)} = \lim_{u \to -\infty} \mathrm{e}^u = 0.$$

Par somme et quotient,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{2x} + 2}{a^x - 1} = \frac{0+2}{0-1} = -2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{2x} + 2}{a^x - 1} = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 1 \\ \text{ n'existe pas si } a = 1 \\ -2 \text{ si } a < 1. \end{cases}}$$

3. Pour tout $x > 0$,

$$\left(x^2 - x + 1\right) a^x = x^2 a^x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

On sait par somme que

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1.$$

Déterminons la limite de $x^2 a^x$.
Premier cas, si $a > 1$, alors,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x \ln(a)} = \lim_{u \to +\infty} \mathrm{e}^u = +\infty.$$

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 a^x = +\infty$. Par produit,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - x + 1\right) a^x = +\infty.$$

Deuxième cas, si $a = 1$, alors $a^x = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - x + 1\right) a^x = +\infty.$$

Troisième cas, si $a < 1$, alors $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)} = \mathrm{e}^{-(-\ln(a))x}$. Posons $\alpha = -\ln(a) > 0$ car $a < 1$. Par croissance comparée, on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 a^x = \lim_{x \to +\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x} = 0.$$

Donc par produit,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - x + 1\right) a^x = \lim_{x \to +\infty} x^2 a^x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - x + 1\right) a^x = \begin{cases} +\infty \text{ si } a \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } a < 1. \end{cases}}$$

4. En posant $t = \frac{1}{x}$, on a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t \to +\infty} t a^{-t} = \lim_{t \to +\infty} t\, \mathrm{e}^{-t \ln(a)}.$$

Premier cas, si $a > 1$. Posons $\alpha = \ln(a) > 0$. Alors, par croissance comparée,

$$\lim_{t \to +\infty} t\, \mathrm{e}^{-t \ln(a)} = \lim_{t \to +\infty} t\, \mathrm{e}^{-\alpha t} = 0.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0.$$

Deuxième cas, $a = 1$, alors $a^{-t} = \mathrm{e}^0 = 1$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty.$$

Troisième cas, $a > 1$. Posons $\alpha = -\ln(a) > 0$. Alors,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\ln(a)t} = \lim_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Donc par produit,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x} = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } a \leqslant 1. \end{cases}}$$

Exercice 4. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \frac{a^x-1}{a^x+1}$.

1. On sait que la fonction $x \mapsto a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)} > 0$ donc $a^x + 1 > 1 > 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x + 1 \neq 0$. Conclusion, comme quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas, on a

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. On note que le domaine de définition de f, $\mathbb{R}$, est bien centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1} = \frac{\frac{1}{a^x}-1}{\frac{1}{a^x}+1} = \frac{1-a^x}{1+a^x} = -\frac{a^x-1}{a^x+1} = -f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

3. La fonction $x \mapsto a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{(a^x-1)'(a^x+1) - (a^x-1)(a^x+1)'}{(a^x+1)^2}.$$

Or $(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln(a)}\right)' = \ln(a)\,\mathrm{e}^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x$. D'où,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{\ln(a)a^x(a^x+1) - (a^x-1)\ln(a)a^x}{(a^x+1)^2} \\ &= \frac{\ln(a)a^x(a^x+1-a^x+1)}{(a^x+1)^2} \\ &= \frac{2\ln(a)a^x}{(a^x+1)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{2\ln(a)a^x}{(a^x+1)^2}.}$$

4. Premier cas, si $a \in]0;1[$. Alors $\ln(a) < 0$. Or $a^x > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$. Donc la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\ln(a)} = \lim_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = -1.$$

Par imparité de la fonction f, on peut en déduire directement que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$. Sinon, on le démontre ainsi :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x \ln(a)} = \lim_{u \to +\infty} \mathrm{e}^u = +\infty.$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{a^x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{a^x} \frac{1 - \frac{1}{a^x}}{1 + \frac{1}{a^x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{1}{a^x}}{1 + \frac{1}{a^x}} = 1.$$

Ainsi, si $a \in]0;1[$ on obtient,

x	$-\infty$	$+\infty$
f	1 $\searrow$	-1

Si $a = 1$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Dans ce cas la fonction $\boxed{f \text{ est la fonction nulle}}$.
Si $a \in]1; +\infty[$. Dès lors, $\ln(a) > 1$. Donc par la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'une part,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x \ln(a)} = \lim_{u \to +\infty} \mathrm{e}^u = +\infty.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$. Par suite,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{a^x} \frac{1 - \frac{1}{a^x}}{1 + \frac{1}{a^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{a^x}}{1 + \frac{1}{a^x}} = 1.$$

Méthode 1, par imparité, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
Méthode 2, on a

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x \ln(a)} = \lim_{u \to -\infty} \mathrm{e}^u = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = -1.$$

Conclusion, si $a \in]1; +\infty[$,

x	$-\infty$	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	1

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
5^{3x} = 7 \quad & \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{3x \ln(5)} = 7 \\
& \Leftrightarrow \quad \ln\left(\mathrm{e}^{3x \ln(5)}\right) = \ln(7) \qquad \text{car ln est bijective} \\
& \Leftrightarrow \quad 3x \ln(5) = \ln(7) \\
& \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(7)}{3 \ln(5)} \qquad \text{car } 3 \ln(5) \neq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{\frac{\ln(7)}{3\ln(5)}\right\}.}$$

Vérification : si $x = \frac{\ln(7)}{3\ln(5)}$, *alors*

$$5^{3x} = 5^{3\frac{\ln(7)}{3\ln(5)}} = 5^{\frac{\ln(7)}{\ln(5)}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(7)}{\ln(5)}\ln(5)} = \mathrm{e}^{\ln(7)} = 7 \quad \textit{OK !}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2^{x^3} = 3^{x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x^3\ln(2)} = \mathrm{e}^{x^2\ln(3)} \\ &\Leftrightarrow \quad x^3\ln(2) = x^2\ln(3) \qquad \text{car exp est bijective} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x\ln(2) = \ln(3) \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \qquad \text{car } \ln(2) \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{0; \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right\}.}$$

Vérification, si $x = 0$, *alors* $2^{x^3} = 2^0 = 1$ *et* $3^{x^2} = 3^0 = 1$. *OK !*
Si $x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$, *alors*

$$2^{x^3} = 2^{\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)^3} = \mathrm{e}^{\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)^3\ln(2)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln^3(3)}{\ln^2(2)}}$$

$$3^{x^2} = 3^{\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)^2} = \mathrm{e}^{\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)^2\ln(3)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln^3(3)}{\ln^2(2)}} \qquad \textit{OK !}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2^x + \frac{6}{2^x} = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad X + \frac{6}{X} = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 + 6 = 5X \qquad \text{car } X = 2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)} > 0 \text{ et donc } X \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 - 5X + 6 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 - 5X + 6$. On a

$$\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2^x + \frac{6}{2^x} = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad X = \frac{5+1}{2} = 3 \ \text{ OU } \ X = \frac{5-1}{2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x\ln(2)} = 3 \ \text{ OU } \ \mathrm{e}^{x\ln(2)} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x\ln(2) = \ln(3) \ \text{ OU } \ x\ln(2) = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \ \text{ OU } \ x = 1 \qquad \text{car } \ln(2) \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_3 = \left\{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}; 1\right\}.}$$

Vérification : si $x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$, *alors*

$$2^x = 2^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\ln(2)} = \mathrm{e}^{\ln(3)} = 3.$$

Donc

$$2^x + \frac{6}{2^x} = 3 + \frac{6}{3} = 3 + 2 = 5 \quad \textit{OK !}$$

Si $x = 1$, *alors* $2^x = 2$ *et donc*

$$2^x + \frac{6}{2^x} = 2 + \frac{6}{2} = 2 + 3 = 5 \quad \textit{OK !}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x^{\sqrt{x}} \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x} \text{ existe} \\ \ln(x) \text{ existe} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

De même,

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})^x \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x\ln(\sqrt{x})} \text{ existe} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) \text{ existe} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \text{ existe et } \sqrt{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ a un sens si $x > 0$. Soit $x \in]0; +\infty[$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} = \mathrm{e}^{x\ln(\sqrt{x})} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = x\ln\left(x^{1/2}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(x) = 0 \ \text{ OU } \ \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \text{ OU } \ \begin{cases} 1 = \frac{\sqrt{x}}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{car } x > 0 \text{ donc } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \text{ OU } \ \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ x \neq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \mathit{OU} \ x = 4 \quad \text{car } x > 0. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_4 = \{1; 4\}.}$$

Vérification, si $x = 1$, alors $x^{\sqrt{x}} = 1^1 = 1$ et $(\sqrt{x})^x = 1^1 = 1$ OK !
Si $x = 4$, alors $x^{\sqrt{x}} = 4^2 = 16$ et $(\sqrt{x})^x = \sqrt{4}^4 = 2^4 = 16$ OK !

5. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = a^x$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a^x + a^{1-x} = a + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a^x + a \times a^{-x} = a + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a^x + \frac{a}{a^x} = a + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad X + \frac{a}{X} = a + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 + a = (a+1)\,X \quad \text{car } X = a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)} > 0, \text{ donc } X \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 - (a+1)\,X + a = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé :

$$\Delta = (a+1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geqslant 0.$$

Miam les petites identités remarquables.
D'où,

$$\begin{aligned} a^x + a^{1-x} = a + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad X = \frac{a+1-(a-1)}{2} = 1 \ \text{ OU } \ X = \frac{a+1+(a-1)}{2} = a \\ &\Leftrightarrow \quad a^x = 1 \ \text{ OU } \ a^x = a \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x\ln(a)} = 1 \ \text{ OU } \ \mathrm{e}^{x\ln(a)} = a \\ &\Leftrightarrow \quad x\ln(a) = \ln(1) = 0 \ \text{ OU } \ x\ln(a) = \ln(a) \quad \text{car } a > 0. \end{aligned}$$

Premier cas, $a = 1$. Alors $\ln(a) = 0$ et donc l'équation est toujours vérifiée. Dans ce cas, $\mathscr{S}_5 = \mathbb{R}$.

Deuxième cas, $a \neq 1$. Alors $\ln(a) \neq 0$ et donc

$$a^x + a^{1-x} = a + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = 1.$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_5 = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a = 1 \\ \{0;1\} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}}$$

Vérification, si $a = 1$, alors $a^x + a^{1-x} = 1^x + 1^{1-x} = 1 + 1 = a + 1$ OK !
Si $a \neq 1$ et $x = 0$, alors $a^x + a^{1-x} = a^0 + a^1 = 1 + a$ OK !
Si $a \neq 1$ et $x = 1$, alors $a^x + a^{1-x} = a^1 + a^0 = a + 1$ OK !

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{2^{2x}}{2} + 3^x + 4^x 4^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}} \times 9 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\left(2^2\right)^x}{2} + 3^x + 4^x\sqrt{4} - 9\left(9^{1/2}\right)^x = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{4^x}{2} + 3^x + 2 \times 4^x - 9 \times 3^x = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}4^x = 8 \times 3^x \\
& \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{5}{2}4^x\right) = \ln\left(8 \times 3^x\right) \quad \text{car } \frac{5}{2}4^x > 0 \text{ et } 8 \times 3^x > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(4^x\right) = \ln\left(8\right) + \ln\left(3^x\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{5}{2}\right) + x\ln(4) = \ln\left(8\right) + x\ln(3) \\
& \Leftrightarrow \quad x\left(\ln(4) - \ln(3)\right) = \ln(8) - \ln\left(\frac{5}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad x\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(8 \times \frac{2}{5}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_6 = \left\{ \frac{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \right\}.}$$