Le développement limité de l'exponentielle

I Introduction

- Quel problème pose la fonction exponentielle ?
- Que vaut $\mathrm{e}^{0,1}$?
- Qu'est-ce qu'une tangente à une courbe ?
- Quelle est la tangente de la fonction exponentielle en 0 ?

L'objectif de la séance est de généraliser le concept de tangente en approchant au mieux la fonction exponentielle par une parabole, un polynôme de degré 3, 4 ou même n !

II Activité : construction du développement limité de l'exponentielle

Soit $N \in \mathbb{N}$. On recherche $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$, $N+1$ coefficients réels et h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N + h(x) x^N \\ \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 \end{cases}$$

On fixe dans la suite $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions ci-dessus.

Partie 1 : L'exponentielle n'est pas et ne sera jamais un polynôme.

On montre dans cette partie que la fonction h n'est pas la fonction nulle.
On procède par l'absurde, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^N}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N}{x^N}$.
3. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

Partie 2 : Les dérivées n-ièmes

On définit dans cette partie les dérivées n-ièmes et on calcule celles de l'exponentielle et de monômes $x \mapsto x^p$.

Définition II.1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence la dérivée n-ième sur $\mathbb{R}$, notée $f^{(n)}$ de la façon suivante :

- $f^{(0)} = f$,
- si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque 1 : La dérivée première $f^{(1)}$ est f', la dérivée seconde $f^{(2)} = (f')'$ se note aussi f''.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction exponentielle est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\exp^{(n)}$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^p$.
   (a) Pour tout $n \in [\![0; p]\!]$, montrer par récurrence que la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(n)(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times p}{1 \times 2 \times \cdots \times p - n} x^{n-p}.$$
   (b) Préciser $f^{(p)}$.
   (c) Montrer que pour tout $n > p$, f est n fois dérivable et préciser $f^{(n)}$.

Proposition II.2

La somme, la différence, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas), la composée de fonctions n fois dérivables est aussi n fois dérivable.

Partie 3 : Gestion du terme reste

On exprime dans cette partie la dérivée n-ième du reste.
On suppose que la fonction h est N fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $H : x \mapsto h(x)x^N$.

6. Justifier que H est N fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
7. Calculer la dérivée de H sur $\mathbb{R}$.
8. (a) Montrer qu'il existe h_1 une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = h_1(x)x^{N-1}$
   (b) Justifier que h_1 est $N-1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} h_1(x) = 0$.

On admet dans la suite que pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, il existe h_k, définie et $N-k$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H^{(k)}(x) = h_k(x)x^{N-k} \\ \lim\limits_{x\to 0} h_k(x) = 0. \end{cases}$$

Partie 4 : Détermination des coefficients a_k

On détermine ici le développement sous forme de polynôme de l'exponentielle.

9. En prenant un x bien choisi, montrer que $a_0 = 1$.
10. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
11. En déduire que $a_1 = 1$.
12. Montrer que pour tout $k \in [\![0;N]\!]$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = k!a_k + (k+1)!a_{k+1}x + \frac{(k+2)!}{2}a_{k+2}x^2 + \cdots + \frac{N!}{(N-k)!}a_N x^{N-k} + h_k(x)x^{N-k}.$$

13. En déduire pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, la valeur de a_k.

Partie 5 : Conclusion.

On regarde une petite application de cette écriture, notamment pour approcher et calculer exp *au voisinage de* 0.

14. Donner l'écriture « du développement limité » de l'exponentielle.
15. En prenant $N = 0$, puis $N = 1$, 2, 3, en déduire des valeurs approchées de $\mathrm{e}^{0,1}$.
16. Vérifier le résultat à la calculatrice.
17. Procéder de même pour approcher e^{10}. Que peut-on en constater ?

III Cours

Définition III.1

Soit f une fonction définie sur I un intervalle contenant 0. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ en 0 s'il existe $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et h une fonction de I dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N + h(x)x^N$$

et $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$.

Proposition III.2

On a les développements limités usuels suivants :

e^x	$=$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + h(x)x^n.$
$\sin(x)$	$=$	$x - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + h(x)x^{2n+1}.$
$\cos(x)$	$=$	$1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + h(x)x^{2n}.$
$\frac{1}{1-x}$	$=$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + h(x)x^n.$
$\frac{1}{1+x}$	$=$	$1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + h(x)x^n.$
$\ln(1+x)$	$=$	$x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + h(x)x^n.$
$\ln(1-x)$	$=$	$-x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + h(x)x^n.$
$(1+x)^\alpha$	$=$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + h(x)x^n.$
$\tan(x)$	$=$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + h(x)x^5.$

Proposition III.3

Si f admet un développement limité à l'ordre $N \geqslant 2$ en 0 donné par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_N x^N + h(x)x^N,$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$.
Alors f admet une tangente en 0 d'équation $y = a_0 + a_1 x$ et la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0 est donnée par le signe de $a_N x^N$.

Exemple 2 : Par exemple puisque $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + h(x)x^2$. Alors $y = 1 + x$ est la tangente de l'exponentielle en 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{2} \geqslant 0$. Donc la courbe représentative de l'exponentielle est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

IV Exercices

Exercice 1. *(Sommes de DL)* Pour chacune des fonctions données, calculer le développement limité de la fonction à l'ordre exigé et en déduire si f admet une tangente et préciser la position de son graphe par rapport à sa tangente.

1. DL_6 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$.
2. DL_3 de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$.
3. DL_5 de $f : x \mapsto 3\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.
4. DL_3 de $f : x \mapsto \tan(x) + \ln(1-x) + \mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 2. *(Produits de DL)* Calculer le développement limité à l'ordre indiqué.

1. DL_3 de $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$.
2. DL_4 de $f : x \mapsto \sin(x)\ln(1+x)$.
3. DL_5 de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$.
4. DL_4 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x-x^2}$.

Exercice 3. *(Composées de DL)* Calculer le développement limité à l'ordre indiqué.

1. DL_3 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$.
2. DL_4 de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.
3. DL_3 de $f : x \mapsto \frac{x^2}{1-\cos(x)}$.
4. DL_3 de $f : x \mapsto \ln\left(1 + x + \sqrt{1+x}\right)$.

Exercice 4. *(Application aux calculs de limites)* A l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - x - \cos(x)}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} x - x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$

Deux personnes font un tour en montgolfière mais se perdent. Elles décident de descendre un peu pour demander leur chemin à deux autres personnes se promenant par là. Elles s'approchent et demande :
« Pardonnez-moi vous pourriez-nous dire où nous sommes ? »
Les deux randonneurs se regardent, délibèrent un long moment puis répondent :
« Sans erreur possible, vous êtes dans une montgolfière ! »
Les deux personnes de la montgolfière interloquées, remercient malgré tout les promeneurs et reprennent de l'altitude. Plus tard, l'un deux décrète :
« -A mon avis, ces deux personnes étaient certainement des mathématiciens.
-Qu'est-ce qui te fait dire cela ?
-C'est pourtant clair, ils ont mis beaucoup de temps à nous répondre. Ce qu'ils nous ont dit est parfaitement juste mais ne nous sert malheureusement strictement à rien. »
Pendant ce temps, de leur côté, les mathématiciens devisent également :
« Aucun doute, ces personnes dans la montgolfière étaient des physiciens, ils nous posent des questions complètement évidentes et après cela va être encore de notre faute s'ils sont complètement perdus... »