Dynamique du point et équations différentielles

1. La chute libre

Une masse m est lâchée sans vitesse initiale à partir d'une hauteur h. On étudie la dynamique de cette masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On rappelle que l'accélération du champ de pesanteur g vaut $9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

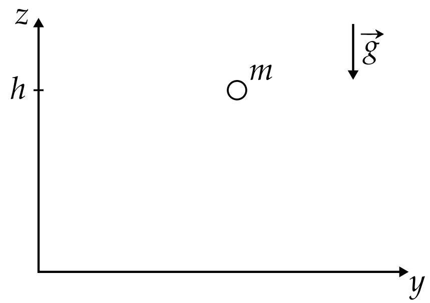


FIGURE 1 – Chute libre d'une masse m.

Principe fondamental de la dynamique

L'accélération $\vec{a}$ dans un référentiel galiléen d'un objet de masse m vérifie le principe fondamentale de la dynamique

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$

où $\sum_i \vec{F}_i$ (en newton N) correspond à l'ensemble des forces qui s'exerce sur l'objet.

☑ Référentiel galiléen

Rappel — L'accélération $\vec{a}$ correspond à la dérivée temporelle de la vitesse $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$. D'un point de vue dimension, $\vec{a}$ s'exprime en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $\vec{v}$ en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Au tableau 1

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m et les représenter sur la figure.
2. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur l'axe vertical (Oz).
3. En déduire une équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$.
4. Résoudre cette équation différentielle.
5. Tracer v en fonction de t.
6. Établir l'expression de la position z de la masse au cours du temps.

À vous !

Le passager d'un avion laisse tomber une balle d'un avion se trouvant à une altitude de 4 km.

1. Combien de temps mets la balle à atteindre le sol ?
2. Quelle vitesse atteint-elle ?
3. La vitesse limite en chute libre est de $250\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, qu'en pensez vous ?

2. Tir de projectile

La masse m est maintenant lancée depuis le sol avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Le référentiel terrestre est supposé galiléen. On note $\vec{v} = v_y\vec{e_y} + v_z\vec{e_z}$ la vitesse de la masse.

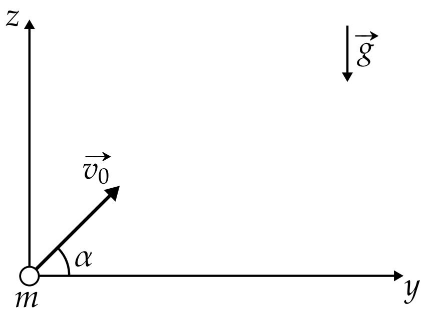


FIGURE 2 – Tir d'un projectile de masse m.

Au tableau 2

1. Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m ? Les représenter sur le schéma.
2. Comment se projette la vitesse initiale $\vec{v_0}$ sur les axes (Oy) et (Oz) ?
3. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur les axes (Oy) et (Oz).
4. Établir les équations différentielles vérifiées par v_y et v_z.
5. Résoudre ces équations différentielles.
6. Établir l'expression de l'ordonnée z et de l'abscisse y de la masse m au cours du temps. Tracer $z(t)$.
7. En quoi la modélisation du tir d'un projectile diffère-t-elle de celle de la chute libre ?

3. Chute avec frottements

La masse m est de nouveau lâchée depuis une hauteur h sans vitesse initiale. On suppose maintenant que l'air exerce sur la masse m une force de frottement $\vec{F} = -k\vec{v}$.

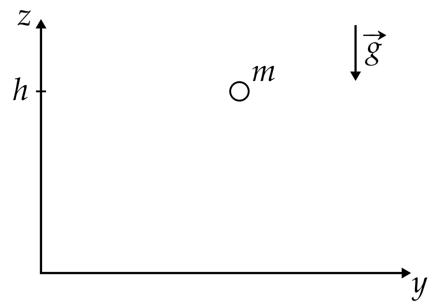


FIGURE 3 – Chute d'une masse m.

Au tableau 3

1. Quelle est l'unité de k en unités du système international.
2. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m et les représenter sur la figure.
3. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur l'axe vertical (Oz).
4. En déduire une équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$. Faire apparaître une constante de temps τ.
5. Résoudre cette équation différentielle.
6. Tracer $|v|$ en fonction de t.
7. Graphiquement, où retrouve-t-on la solution particulière v_p et le temps caractéristique τ ?
8. Pourquoi observe-t-on une vitesse limite dans ce cas et pas dans le cas de la chute libre ?

À vous !

On considère de nouveau une balle de masse $m = 100$ g lâchée depuis un avion. Nous avons vu précédemment qu'il était indispensable de prendre en compte la force de frottement exercé par l'air sur la balle qu'on écrit sous la forme

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_x S v \vec{v}.$$

Dans cette expression, $\rho = 1\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ est la masse volumique de l'air, $C_x = 0,45$ le coefficient de traînée et $S = 1,2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^2}$ la surface de la balle.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la balle. Cette équation est difficilement raisonnable, nous ne cherchons pas à le faire.
2. Exprimer la vitesse limite atteinte par la balle et calculer sa valeur.
3. Qu'en pensez-vous ?

4. Le système masse-ressort

La masse m est maintenant attaché à l'extrémité mobile d'un ressort. On note x sa position. Le ressort exerce sur la masse m une force élastique

$$\vec{F}_e = -k(x - \ell_0)\vec{e_x},$$

où k est la constante de raideur du ressort et ℓ_0 la longueur au repos du ressort. On lâche la masse sans vitesse initiale de la position x_0.

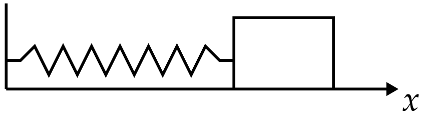


FIGURE 4 – Système masse-ressort

Rappel — L'accélération $\vec{a}$ correspond à la dérivée temporelle seconde de la position. Pour un mouvement uniquement selon $\vec{e_x}$, on peut écrire

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}.$$

D'un point de vue dimension, a s'exprime en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et x en m.

Au tableau 4

1. Quelle est l'unité de k en unités du système international.
2. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m et les représenter sur la figure.
3. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur l'axe vertical (Ox).
4. En déduire une équation différentielle vérifiée par la position x de la masse et la mettre sous la forme

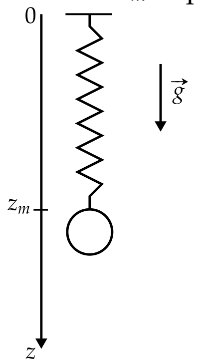
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$$

en précisant les expressions de ω_0^2 et de x_0.

5. Peut-on espérer atteindre une vitesse limite ?
6. Résoudre cette équation différentielle.
7. Tracer x en fonction de t. Commenter cette courbe.

À vous !

Une masse ponctuelle m est suspendue à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k dont l'autre extrémité est solidaire du plafond. On note z_m la position de la masse.



1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m.
2. Déterminer l'expression de la position d'équilibre z_e de la masse m en fonction de ℓ_0, g, m et k.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position z_m de la masse et la mettre sous une forme canonique.
4. Résoudre cette équation différentielle en considérant les conditions initiales $z_m(0) = z_0$ et $\dot{z_m}(0) = 0$.

> **Exemple** — Le modèle de l'oscillateur harmonique s'avère efficace pour décrire un grand nombre de système physique : une balançoire, une liaison atomique, ...

5. L'oscillateur harmonique amorti

On imagine maintenant que le système masse-ressort se trouve à l'intérieur d'un fluide. Il se retrouve alors soumis à une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$ avec α une constante qui s'exprime en $\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Dans ce cas, on peut montrer que la position x de la masse vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\alpha}{2m\omega_0} > 0.$$

Nous allons dans un premier temps étudier deux régimes asymptotiques

- le second terme est négligeable devant le troisième,
- le troisième terme est négligeable devant le deuxième.

> **Au tableau 5**
>
> 1. Écrire l'équation différentielle par x dans chaque cas. Quelles équations retrouve-t-on ?
> 2. Conclure sur le rôle joué par chacun des termes.

L'évolution temporelle va donc dépendre de la valeur de ξ.

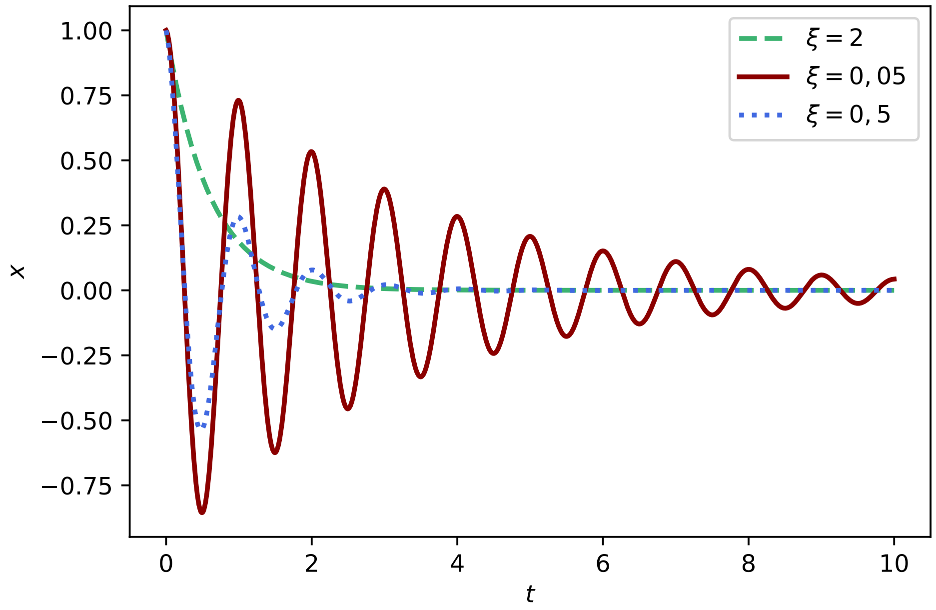


FIGURE 5 – Évolution temporelle de x pour différentes valeurs de ξ. La valeur de ω_0 a été arbitrairement fixée à $1\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.