Préparation Scientifique à l'Enseignement Supérieur

Physique – mécanique – 06.04.2024 – pierre.boudinet@ac-besancon.fr

Mécanique – traitement numérique et analytique des équations du mouvement

1. Chute verticale avec frottement

Dans tout ce qui suit on considère la chute d'une masse m (point matériel M) lâchée sans vitesse initiale dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ On se repère avec les coordonnées cartésiennes Oxyz tel que Ox est l'axe descendant et $\vec{g}=g\vec{e}_x$. $x(t)$ désigne la position de M et $\vec{v}=v(t)\vec{e}_x$ sa vitesse.

1. Notions préliminaires

Activité : En l'absence de frottement, déterminer la loi horaire de x. Cela revient à résoudre $\frac{d^2x}{dt^2}=g$ avec $x(0)=0$ et $v(0)=0$.

Activité : Faire un schéma. En l'absence de frottement, déterminer approximativement la hauteur de chute nécessaire à dépasser la vitesse du son.

2. Frottement fluide linéaire

Lorsque la vitesse est assez faible, ou le fluide assez visqueux, il s'ajoute au poids une force de frottement $-\alpha\vec{v}$ où α dépend du fluide et de la taille de l'objet.

En appliquant le PFD, on trouve $m\frac{dv}{dt}=mg-\alpha v$ et $v(t)=(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t})\frac{mg}{\alpha}$.

Activité : à l'aide d'un tableur, sinon d'une calculatrice, tracer la courbe de $v(t)$ $m=100\,kg$, $g=9.81\,m.s^{-2}$, $\alpha=20\,S.I.$

Activité : par analyse dimensionnelle, préciser l'unité de α .

Activité : aux grands temps (en préciser l'ordre de grandeur) la vitesse ne varie quasiment plus et la somme des forces est nulle. Montrer qu'on retrouve facilement la vitesse-limite $\frac{mg}{\alpha}$.

Activité : pour des courts temps, quand $t\ll\frac{m}{\alpha}$, $e^{-\frac{\alpha}{m}t}\approx 1-\frac{\alpha}{m}t$. En déduire une expression simplifiée de $v(t)$. Pourquoi cela correspond-t-il à une chute libre ?

3. Simulation numérique

$m\frac{dv}{dt}=mg-\alpha v$ peut se résoudre numériquement en simplifiant en $\frac{dv}{dt}=g-\frac{\alpha}{m}v$, en introduisant $v_0=\frac{m}{\alpha}$ et $u=\frac{v}{v_0}$ ainsi que $\theta=\frac{t}{(\frac{m}{\alpha})}$.

Activité : Relier $\frac{du}{d\theta}$ à u. Préciser les dimensions des deux quantités.

Numériquement, on a pour un petit incrément $d\theta$: $u(\theta+d\theta)=u(\theta)+d\theta(1-u)$

Activité : avec un tableur, en prenant $d\theta=0.1$, déterminer numériquement u pour $\theta\leq 5$ et tracer la courbe. Que se passe-t-il avec un pas $d\theta$ plus grand ou plus petit ?

4. Frottement fluide quadratique

Avec un objet trop large, ou une vitesse trop élevée, le frottement fluide s'écrit $-\beta v^2\vec{e}_x$ et n'est plus linéaire. On a alors $m\frac{dv}{dt}=mg-\beta v^2$.

Activité : trouver la vitesse limite atteinte aux grands temps. Par analyse dimensionnelle, trouver un ordre de grandeur grossier de la durée à attendre pour obtenir cette vitesse.

Activité : en introduisant $v_0=\sqrt{\frac{g}{\beta}}$, $u=\frac{v}{v_0}$ et $\theta=\frac{m}{\sqrt{\beta g}}$, trouver quelle équation différentielle relie $\frac{du}{dt}$ et u .

Activité : avec un tableur, en prenant $d\theta=0.1$, déterminer numériquement u pour $\theta\leq 5$ et tracer la courbe. Que se passe-t-il avec un pas $d\theta$ plus grand ou plus petit ? Comparer à la courbe obtenue pour un frottement fluide linéaire. Quel est l'intérêt d'avoir employé das variables sans dimension ?

2. Oscillateur harmonique avec ou sans frottement

1. Notions préliminaires

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Avec les mêmes coordonnées que précédemment, en la position du point O du côté immobile du ressort, on obtient en écrivant le PFD : $m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k(x-l_0)$

Activité : faire un schéma avec le bilan des forces. Montrer qu'en introduisant $X=x-(\frac{mg}{k}+l_0)$ on se ramène à $\frac{d^2X}{dt^2}-kX=0$. Quel est l'intérêt de cette transformation ?

La solution la plus générale de l'équation précédente est $X = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Activité : vérifier l'assertion précédente en reportant dans l'équation différentielle. Quelle est la fréquence des oscillations ?

2. Une solution numérique… imparfaite !

On peut réécrire ainsi l'équation différentielle précédente : $\begin{cases} Y = \frac{dX}{d\theta} \\ \frac{dY}{d\theta} = -X \end{cases}$. Ici, $\theta = \omega t$.

Numériquement, $\begin{matrix} Y(\theta + d\theta) \approx Y(\theta) + d\theta X(\theta) \\ X(\theta + d\theta) \approx X(\theta) - d\theta Y(\theta) \end{matrix}$

Activité : en employant un tableur, avec $X(0) = 1.0\,cm$ et $Y(0) = 0$, déterminer $X(\theta)$ et $Y(\theta)$ pour $\theta \le 50$ et $d\theta = 0.1$. Que se passe-t-il avec un pas plus grand ? Plus petit ?

3. Un peu mieux...

On peut aller à l'ordre 2 et proposer $\begin{matrix} Y(\theta + d\theta) \approx Y(\theta) + d\theta X(\theta) - \frac{1}{2} d\theta^2 Y(\theta) \\ X(\theta + d\theta) \approx X(\theta) - d\theta Y(\theta) - \frac{1}{2} d\theta^2 X(\theta) \end{matrix}$

Activité : en employant un tableur, avec $X(0) = 1.0\,cm$ et $Y(0) = 0$, déterminer $X(\theta)$ et $Y(\theta)$ pour $\theta \le 50$ et $d\theta = 0.1$. Que se passe-t-il avec un pas plus grand ? Plus petit ? Comparer à l'essai précédent.

Activité : pour les deux résolutions numériques, représenter Y en fonction de X .

4. L'énergie mécanique

L'énergie potentielle d'un ressort étiré s'écrit $\frac{1}{2} k\, \textit{élongation}^2$. Par rapport à la position d'équilibre, l'énergie potentielle du ressort est ici $\frac{1}{2} k X^2$.

Activité : avec $X = A\cos(\omega t)$ vérifier que l'énergie mécanique $\frac{1}{2} m \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} k X^2$ est bien conservée. L'était-elle dans les simulations numériques ?