Correction de l'exercice Noël 06
Calcul dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1-\frac{\pi}{2} > 0 \\ x \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \frac{\pi}{2} - 1 \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{\pi}{2}-1; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left]\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[\right). \end{aligned}$$

Posons $I = \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$. I est un voisinage à droite de $\frac{\pi}{2}$ sur lequel f est bien définie. Pour tout $x \in I$, posons $h = x - \frac{\pi}{2}$ i.e. $x = \frac{\pi}{2} + h$. Alors, on a

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = \frac{\ln(1+h)}{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right|} = \frac{\ln(1+h)}{|-\sin(h)|} = \frac{\ln(1+h)}{|\sin(h)|}.$$

Or pour $x \in I$, on a $h \in]0;\pi[$. Donc $\sin(h) > 0$. Ainsi,

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = \frac{\ln(1+h)}{\sin(h)}$$

Or quand $x \to \frac{\pi}{2}$, on a $t \to 0$. De plus, $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$ et $\sin(h) \underset{h\to 0}{\sim} h$, donc par quotient,

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\sim} 1.$$

Ou encore

$$f(x) \underset{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}}{\sim} 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} f(x) = 1.}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par observer que

$$(I) \text{ est bien définie} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \neq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2 \ \text{ ET } \ x \neq 2.$$

Fixons désormais $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
Afin de multiplier l'inégalité par $x^2 - 4$, il nous faut connaître son signe. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. On a

$$x^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \ \text{ OU } \ x > 2.$$

Premier cas. Soit $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. Alors, $x^2 - 4 > 0$. Donc

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x \leqslant -x^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2x - 4 \leqslant 0.$$

On observe que 2 est une racine « évidente » de $x^3 - 2x - 4$. En effet, si $x = 2$, $x^3 - 2x - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$. Donc il est possible de factoriser $x^3 - 2x - 4$ par $(x-2)$ comme suit :

$$x^3 - 2x - 4 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Ainsi,

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-2)\left(x^2+2x+2\right) \leqslant 0.$$

Soit Δ le discriminant de x^2+2x+2. On a $\Delta = 4-8 = -4 < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+2 > 0$. Ainsi, pour $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, on obtient :

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad x-2 \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leqslant 2.$$

Or $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. Conclusion, dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$\mathscr{S}_1 =]-\infty; -2[\,.$$

Second cas. Soit $x \in]-2; 2[$. On a alors $x^2-4 < 0$. Donc

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3-x^2-2x \geqslant -x^2+4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3-2x-4 \geqslant 0.$$

On comme vu précédemment, $x^3-2x-4 = (x-2)\left(x^2+2x+2\right)$ et $x^2+2x+2 > 0$. Donc

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-2)\left(x^2+2x+2\right) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x-2 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant 2.$$

Or $x \in]-2; 2[$. Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_2 = \emptyset.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (I) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 =]-\infty; -2[\,.}$$