Correction de l'exercice Hiver 01
Probabilités / Trigonométrie

Solution de l'exercice 1 On tire successivement et sans remise des boules dans une urne qui en contient initialement 5 blanches et 4 rouges. On note X_i la variable aléatoire retournant 1 si la boule est rouge au tirage i et 0 sinon.

1. X_1 ne comprenant que deux issues possibles 0 et 1 : $X_2(\Omega) = [\![0;1]\!]$ et est donc nécessairement de loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre $p = \mathbb{P}(X_1 = 1)$. Initialement, l'urne contient 9 boules dont 4 rouges. Le tirage étant uniforme parmi toutes les boules, on obtient,
$$p = \frac{4}{9}.$$
Conclusion,
$$\boxed{X_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{4}{9}\right).}$$

2. Par la formule des probabilités composées,
$$\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1).$$
Par la question précédente, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{4}{9}$. D'autre part, sachant $(X_1 = 1)$ réalisé, cela signifie que l'on a ôté de l'urne une boule rouge. Il reste donc 3 boules rouges et 8 boules au total. Dans cette configuration (donc sachant $X_1 = 1$), on a
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{3}{8}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{6}.}$$

3. On observe également que X_2 ne possède que deux issues 0 et 1 : $X_2(\Omega) = [\![0;1]\!]$. Donc X_2 suit une loi de Bernoulli. Calculons $p = \mathbb{P}(X_2 = 1)$. Puisque $(X_1 = i)_{0 \leqslant i \leqslant 1}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0).$$
Comme dans la question précédente, on obtient,
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$
Conclusion,
$$\boxed{X_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{4}{9}\right).}$$

4. Soit A l'évènement « la première boule rouge tirée le soit au troisième tirage ».
   (a) Pour réaliser il faut obtenir une boule blanche au premier tirage $(X_1 = 0)$ puis une boule blanche au deuxième $(X_2 = 1)$ enfin une boule rouge au troisième tirage $(X_3 = 1)$. D'où
   $$\boxed{A = (X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1).}$$
   On rappelle que cette notation désigne bien l'intersection des trois évènements.

(b) Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_1 = 0, X_2 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Puisque $X_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{4}{9}\right)$, on a $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Puis, sachant que l'on a pioché une boule blanche $X_2 = 0$, alors il reste 4 blanches sur les 8 boules restantes. Donc $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Enfin sachant que l'on a pioché une blanche et encore une blanche $(X_1 = 0, X_2 = 0)$, alors il reste 3 blanches et 7 boules au total. Donc obtenir une rouge vaut : $\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{3}{7}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{42}.}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. On obtient que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos(x) = -2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} - x + x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} - x - x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right).}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on sait que $\sin(u) = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
\cos(x) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \cos(x) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \geqslant 0 \qquad \text{par la question précédente} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \geqslant 0 \qquad \text{car } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0 \text{ car } \frac{\pi}{12} \in \left]0; \frac{\pi}{12}\right[\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2k\pi \leqslant x - \frac{\pi}{12} \leqslant (2k+1)\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{12} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12} + (2k+1)\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + 2k\pi; \frac{\pi}{12} + (2k+1)\pi\right].}$$