Exercice Printemps 02
Intégration, Calcul algébrique

Exercice 1 Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $T > 0$ et g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si g est constante sur $\mathbb{R}$ alors f est T périodique sur $\mathbb{R}$.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 On considère une famille de nombres $(u_{n,p})_{n\in\mathbb{N}^*, p\in[\![1;p]\!]}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n,1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall p \in [\![2;n]\!],\ u_{n,p} = \sum_{k=1}^{n-p+1} \binom{n}{k} u_{n-k,p-1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_{n,p}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $p \in [\![2;n]\!]$,
$$u_{n,p} = \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{k} u_{k,p-1}$$
2. En déduire pour tout $n \geqslant 2$,
$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u_k.$$