Ex 1: Soient $x \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $T > 0$,

$$g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$$

1- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$$

Or $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x ; x+T]$. oui Donc $\boxed{g \text{ est bien définie.}}$ Bien.

2 - Supposons que g est constante. Montrons que f est T périodique.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et F une primitive de f donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ✓

$$g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt = [F(t)]_{t=x}^{t=x+T}$$
$$= F(x+T) - F(x)$$ oui

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions qui le sont. ✓ De plus,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$ car g est constante oui !

$$\Leftrightarrow f(x+T) = f(x)$$ ✓

Donc f est T périodique. TB.

✓

Donc $\boxed{g \text{ est constante} \Rightarrow f \text{ est } T \text{ périodique.}}$

3- Supposons f est T periodique. Montrons que g est constante.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

f est T périodique $\Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$

Par la question 2, on a :

$g'(x) = f(x+T) - f(x)$ ✓

$g'(x) = 0$ car f est T périodique. ✓

Donc g est constante. OK.

Donc $\boxed{f \text{ est } T \text{ périodique} \Rightarrow g \text{ est constante}}$ Oui

<u>Ex 2</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n,1} = 1$

et $\forall p \in [\![2;n]\!], u_{n,p} = \sum_{k=1}^{n-p+1} \binom{n}{k} u_{n-k,p-1}$

$u_n = \sum_{p=1}^{n} u_{n,p}$

1- Montrons que : $\forall n \geq 2, p \in [\![2;n]\!], u_{n,p} = \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{k} u_{k,p-1}$

On a : $u_{n,p} = \sum_{k=1}^{n-p+1} \binom{n}{k} u_{n-k,p-1}$

Posons $\tilde{k} = n-k$ oui, $k = n - \tilde{k}$ ✓

Si $k=1$, $\tilde{k} = n-1$ ✓

et $k = n-p+1$, $\tilde{k} = n-n+p-1$ ✓
$= p-1$ ✓

Ex2 :

1 - Alors $u_{n,p} = \sum_{\tilde{k}=p-1}^{n-1} \binom{n}{n-\tilde{k}} u_{\tilde{k},p-1}$

$= \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{n-k} u_{k,p-1}$ car l'indice est muet ✓

$$\boxed{u_{n,p} = \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{k} u_{k,p-1}}$$ car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

TB! oui

2 - Soit $n \geq 2$

On a :

$u_n = \sum_{p=1}^{n} u_{n,p} = u_{n,1} + \sum_{p=2}^{n} u_{n,p}$

$= 1 + \sum_{p=2}^{n} u_{n,p}$ ✓ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,1} = 1$

Par la question 1, on a :

$u_n = 1 + \sum_{p=2}^{n} u_{n,p} = 1 + \sum_{p=2}^{n} \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{k} u_{k,p-1}$. OK.