Correction de l'exercice Printemps 02
Intégration, Calcul algébrique

Solution de l'exercice 1

1. La fonction f est continue par hypothèse sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue sur $[x; x+T]$. Donc $\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et $g(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. Posons,
$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Puisque f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'analyse, on sait que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Notamment F est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de plus $F' = f$.
Ainsi, par la relation de Chasles,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+T) - F(x).$$
Par suite, la fonction g est $\mathscr{C}^1$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = (x+T)'\,F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x).$$
Supposons maintenant que g est constante i.e.
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x, \qquad g(x) = C.$$
Alors,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = 0.$$
Donc, par ce qui précède,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) - f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x).$$
Conclusion,
$$\boxed{g \text{ est constante} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est } T\text{-périodique.}}$$

3. On a vu dans le cours que, si f est T-périodique, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Autrement dit,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g(0).$$
Donc g est constante. Conclusion, la réciproque est vraie et donc
$$\boxed{g \text{ est constante} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est } T\text{-périodique.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soient $n \geqslant 2$ et $p \in [\![2;n]\!]$. Posons $\tilde{k} = n-k$. Si $k=1$, alors $\tilde{k} = n-1$ et si $k = n-p+1$, alors $\tilde{k} = p-1$. D'où,

$$\begin{aligned}
u_{n,p} &= \sum_{k=1}^{n-p+1} \binom{n}{k} u_{n-k,p-1} \\
&= \sum_{\tilde{k}=p-1}^{n-1} \binom{n}{n-\tilde{k}} u_{\tilde{k},p-1} \\
&= \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{n-k} u_{k,p-1} \qquad \text{car la variable de sommation est muette} \\
&= \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{k} u_{k,p-1} \qquad \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall p \in [\![2;n]\!], \quad u_{n,p} = \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{k} u_{k,p-1}.}$$

2. Soit $n \geqslant 2$. Par définition, $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_{n,p} = u_{n,1} + \sum_{p=2}^{n} u_{n,p} = 1 + \sum_{p=2}^{n} u_{n,p}$. Puis par la question précédente, car $n \geqslant 2$ et $p \in [\![2;n]\!]$,

$$u_n = 1 + \sum_{p=2}^{n} \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{n}{k} u_{k,p-1}.$$

On reconnait une somme double, avec $2 \leqslant p \leqslant n$ et $p-1 \leqslant k \leqslant n-1$ i.e. $1 \leqslant p-1 \leqslant k \leqslant n-1$ ou encore $2 \leqslant p \leqslant k+1 \leqslant n$. Donc $2 \leqslant p \leqslant k+1$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{p=2}^{k+1} \binom{n}{k} u_{k,p-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{p=2}^{k+1} u_{k,p-1}.$$

Posons $\tilde{p} = p-1$. Alors,

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{p=1}^{k} u_{k,p} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u_k.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u_k.}$$