

## Exercice Printemps 03

### Algèbre linéaire, Fonctions usuelles

**Exercice 1** On considère

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - y + z \\ -x + 3y - 2z \\ -2x + 6y - 4z \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme.
2. Déterminer l'image de  $f$  et préciser son rang.
3.  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. Quel est la dimension de son noyau ?
5. Calculer  $f \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ . En déduire le noyau de  $f$ .
6. Retrouver le résultat précédent à l'aide de la définition du noyau.

**Exercice 2** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. En déduire  $\sin(\arctan(x))$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $\arcsin(x) = 2 \arctan(x)$ .