ROBERT Paul PTSI

Exo printemps 3

Exercice 1 :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - y + z \\ -x + 3y - 2z \\ -2x + 6y - 4z \end{bmatrix}.$$

1) On sait que l'espace de départ est identique à l'espace d'arrivée, d'où on doit simplement prouver que f est linéaire. oui

Soient $(\lambda ; \mu) \in \mathbb{K}^2$ posons

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \checkmark.$$

$$f(\lambda u + \mu v) = f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \checkmark$$

A démontrer !!!!

$$= f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} \mu x' \\ \mu y' \\ \mu z' \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{= \lambda f(u) + \mu f(v).}$$

$\Rightarrow$ linéaire f est un endomorphisme

2) $\mathrm{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3, f x = y \}$.

f est un endomorphisme ~~d'où~~

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? NON !

3) On sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{R}^3)$

de plus $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$,

d'où f est surjective.

Si f est surjective et que les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont identiques, on sait que f est injective donc que f est un isomorphisme.

4) Par déduction, on a

$\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. donc

$\dim(f) = 1$.

La dimension d'une application n'a pas de sens.

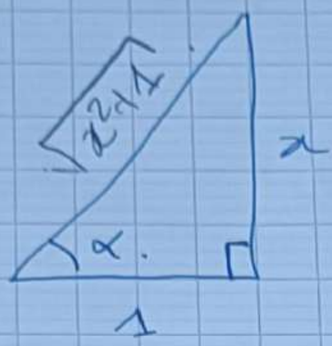
5) $$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 -1 + 2 \\ 1 + 3 - 4 \\ 2 + 6 - 8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ✓

Tout ce que j'ai dit avant est faux...

A bien reprendre.

Exo 2 | Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\cos(\arctan(x))$ | Résolution graphique - logique.



l'angle α à pour tangente x. $\tan(\alpha) = x$.

Donc d'après le théorème de pythagore, $\sqrt{x^2+1}$ est la longueur de l'hypothénuse. $\arctan(x) = \alpha$.

ok!

$$\boxed{\text{D'où } \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}$$

2) De plus on en déduit le même résultat pour $\sin(\arctan(x))$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3) finalement,

$$\arcsin(x) = 2\arctan(x).$$

$$\Rightarrow \sin(2\arctan(x)) = x.$$

?