Correction de l'exercice Printemps 03
Algèbre linéaire, Fonctions usuelles

Solution de l'exercice 1

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\left(u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$. Posons
$$w = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$
On a les égalités vectorielles suivantes :
$$\begin{aligned} f(w) = f\left(\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x'' - y'' + z'' \\ -x'' + 3y'' - 2z'' \\ -2x'' + 6y'' - 4z'' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') \\ -(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z') \\ -2(\lambda x + \mu x') + 6(\lambda y + \mu y') - 4(\lambda z + \mu z') \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} x - y + z \\ -x + 3y - 2z \\ -2x + 6y - 4z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x' - y' + z' \\ -x' + 3y' - 2z' \\ -2x' + 6y' - 4z' \end{bmatrix} \\ &= \lambda f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + \mu f\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$
Donc f est linéaire. De plus f est définie ET à valeurs dans le même ensemble : $\mathbb{R}^3$. Conclusion,
$$\boxed{f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \text{ i.e. } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

2. Puisque $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (c'est même la base canonique de $\mathbb{R}^3$), on a par linéarité de f,
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\-2\end{bmatrix}\right) && \begin{matrix}C_2 \leftarrow C_2 + C_1\\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1\end{matrix}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}\right) && \text{car}\quad C_3 = -C_2\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right) && C_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}C_2\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 + C_2.
\end{aligned}$$

Les dernières opérations sont plus esthétiques que nécessaires. Posons $\mathscr{B}_I = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)$. Par ce qui précède $\mathscr{B}_I$ engendre $\mathrm{Im}\,(f)$. De plus $\mathscr{B}_I$ est composée de deux vecteurs non colinéaires donc est libre. Donc $\mathscr{B}_I$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_I = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(f)\,.}$$

En particulier,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_I) = 2.}$$

3. Puisque $\mathrm{rg}\,(f) = 2 \neq 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. On en déduit que $\mathrm{Im}\,(f) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on sait que
$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijective.}$$
En prenant la négation de ces assertions, on obtient que
$$\boxed{f \text{ n'est ni injective ni bijective.}}$$
4. La dimension de $\mathbb{R}^3$ est finie. Donc par le théorème du rang, et la question 2
$$\boxed{\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \mathrm{rg}\,(f) = 3 - 2 = 1.}$$
Le noyau est donc une droite vectorielle (alors que l'image est un plan vectoriel).
5. On a les égalités entre vecteurs suivantes :
$$f\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1-1+2\\1+3-4\\2+6-8\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
Donc $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Or par la question précédente, $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1$. Donc $\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$:
$$\boxed{f\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right).}$$

6. Soit $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(f) &\Leftrightarrow f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-y+z \\ -x+3y-2z \\ -2x+6y-4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ -x+3y-2z &= 0 \\ -2x+6y-4z &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ 2y-z &= 0 \\ 4y-2z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ z = 2y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x &= y - z = y - 2y = -y \\ z = 2y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{bmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right).}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Posons $u = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Alors, on sait que

$$\frac{1}{\cos^2(u)} = \tan'(u) = 1 + \tan^2(u).$$

Donc $\cos^2(u) = \frac{1}{1+\tan^2(u)}$ ou encore

$$\cos(u) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(u)}} \qquad \text{car } 1 + \tan^2(u) > 0.$$

Or $u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(u) > 0$. Ainsi,

$$\cos(u) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(u)}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ alors que l'égalité $\arctan(\tan(x)) = x$ n'est vraie QUE si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Conclusion,

$$\boxed{\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

2. Puisque $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos(\arctan(x)) \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned}\sin(\arctan(x)) &= \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}\cos(\arctan(x))\\ &= \tan(\arctan(x))\cos(\arctan(x))\\ &= x\cos(\arctan(x)).\end{aligned}$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

3. La fonction arcsin n'étant définie que sur $[-1; 1]$, l'équation n'a un sens que sur $[-1; 1]$. Soit $x \in [-1; 1]$.
Analyse. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}\arcsin(x) = 2\arctan(x) \quad &\Rightarrow \quad \sin(\arcsin(x)) = \sin(2\arctan(x))\\ &\Rightarrow \quad x = 2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x))\\ &\Rightarrow \quad x = 2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{par les questions précédentes}\\ &\Rightarrow \quad x = \frac{2x}{1+x^2}\\ &\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ 1 = \frac{2}{1+x^2}\\ &\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ 1+x^2 = 2\\ &\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = -1 \ \text{ OU } \ x = 1.\end{aligned}$$

Synthèse. Si $x = 0$. Alors, $\arcsin(0) = 0$ et $2\arctan(0) = 0$. Donc $x = 0$ est une solution.
Si $x = -1$, alors $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $2\arctan(-1) = 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Donc $x = -1$ est une solution.
Si $x = 1$, alors $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $2\arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Donc $x = 1$ est aussi une solution.
Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; 0; 1\}.}$$