Correction de l'exercice Printemps 04
Séries, algèbre linéaire

Solution de l'exercice 1

1. *Premier cas.* Soit $x \in]0;1[$ alors par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty} n^4x^n = 0$ i.e. $n^2x^n \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$0 \leqslant n^2x^n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2x^n$ converge.
Second cas. Soit $x \in [1;+\infty[$, alors on a $\lim_{n\to+\infty} n^2x^n = +\infty$. Par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2x^n$ diverge grossièrement et donc diverge.
Conclusion. On a
$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } x \in]0;1[\text{ alors } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2x^n \text{ converge.} \\ \text{Si } x \in [1;+\infty[\text{ alors } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2x^n \text{ diverge.} \end{cases}}$$

2. Soit $x \in]-1;0[$. Alors, $|x| \in]0;1[$. Donc par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|n^2x^n\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2\,|x|^n$ converge. Autrement dit, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2x^n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,
$$\boxed{\text{Si } x \in]-1;0[,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2\,|x|^n.}$$

3. Soit $x \in]0;1[$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} kx^k$. Par le changement d'indice $\tilde{k} = k-1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} kx^k &= 0 + \sum_{k=1}^{n} kx^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,x^{k+1} \\ &= x\sum_{k=0}^{n-1} kx^k + x\sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ &= x\sum_{k=0}^{n} kx^k - xnx^n + x\sum_{k=0}^{n-1} x^n \\ &= xS_n - nx^{n+1} + x\sum_{k=0}^{n-1} x^n. \end{aligned}$$
Or $\sum_{k=0}^{n-1} x^n$ est une somme géométrique de raison $x \neq 1$. Donc
$$\begin{aligned} S_n = xS_n - nx^{n+1} + x\frac{1-x^n}{1-x} \quad &\Leftrightarrow \quad (1-x)\,S_n = \frac{x - x^{n+1} - nx^{n+1} + nx^{n+2}}{1-x} \\ &\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{x - (n+1)\,x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Puisque $x \in]0;1[$, par croissance comparée, $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{(1-x)^2}$. Donc on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n$ converge et de plus

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par le changement d'indice $\tilde{k} = k+1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2x^k = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 x^{k+1}$$
$$= x\sum_{k=0}^{n-1} k^2x^k + 2x\sum_{k=0}^{n-1} kx^k + x\sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

- D'après la question 1, on sait que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2x^k$ converge.
- D'après la question 2.(a), la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} kx^k$ converge.
- La série $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ converge également en tant que série géométrique de raison $x \in]0;1[$.

Donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$, en notant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2x^k$, on obtient que

$$S = xS + 2x\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k + x\frac{1}{1-x}.$$

Donc d'après la question 2.(a),

$$\begin{aligned} S = xS + 2x\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \quad &\Leftrightarrow \quad (1-x)\,S = \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{x-x^2}{(1-x)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad S = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.}$$

Solution de l'exercice 2 Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $P = aX + b$ et $Q = a'X + b'$ deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= f((\lambda a + \mu a')X + \lambda b + \mu b') \\ &= (-3(\lambda a + \mu a') + 2(\lambda b + \mu b'))X - 4(\lambda a + \mu a') + 3(\lambda b + \mu b') \\ &= \lambda((-3a+2b)X - 4a + 3b) + \mu((-3a'+2b')X - 4a' + 3b') \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. De plus f est définie sur $\mathbb{R}_1[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_1[X]$. Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X])$. Montrons maintenant que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}$. Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$. On a

$$\begin{aligned} f^2(P) &= f(f(P)) \\ &= f(\underbrace{(-3a+2b)}_{=a'}X \underbrace{-4a+3b}_{=b'}) \\ &= (-3a'+2b')X - 4a' + 3b' \\ &= [-3(-3a+2b) + 2(-4a+3b)]X - 4(-3a+2b) + 3(-4a+3b) \\ &= (9a - 6b - 8a + 6b)X + 12a - 8b - 12a + 9b \\ &= aX + b = P \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour $P \in \mathbb{R}_1[X]$ quelconque, on en déduit que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est une symétrie de } \mathbb{R}_1[X].}$$

Déterminons les deux espaces caractéristiques de f : $F = \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}\right)$ et $G = \mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}\right)$. Soit $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad f(P) = P \\
& \Leftrightarrow \quad (-3a+2b)\,X - 4a + 3b = aX + b \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3a + 2b = a \\ -4a + 3b = b \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -4a + 2b = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad b = 2a \\
& \Leftrightarrow \quad P = aX + 2a.
\end{aligned}$$

D'où $F = \mathrm{Vect}\,(X+2)$. De même,

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad (-3a+2b)\,X - 4a + 3b = -aX - b \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3a + 2b = -a \\ -4a + 3b = -b \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ -4a + 4b = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad a = b \\
& \Leftrightarrow \quad P = aX + a.
\end{aligned}$$

D'où $G = \mathrm{Vect}\,(X+1)$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est la symétrie sur } F = \mathrm{Vect}\,(X+2) \text{ parallèlement à } G = \mathrm{Vect}\,(X+1).}$$

On peut vérifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_1[X]$.