

## Exercice Printemps 05

### Probabilités / Calcul d'intégrales

**Exercice 1** Doudou le hamster (une vraie star, Doudou a sa propre page [wikipédia](#) !) a quatre activités dans sa vie : il dort, il mange, il trotte dans sa roue ou... il ne fait absolument rien (immobile le regard vide). Toutes les heures, Doudou change d'activité et en choisit une autre de façon équiprobable. On suppose qu'à l'instant initial Doudou dort. On note  $X_k$  la variable aléatoire retournant 0 si Doudou dort à l'étape  $k$ , 1 s'il mange à cette étape et 2 s'il trotte.

1. Préciser la loi de  $X_1$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(X_2 = 0)$ .
3. Déterminer la loi de  $X_2$ .
4. Soit  $A_n$  l'évènement « Doudou retourne dormir pour la première fois à l'étape  $n \in \mathbb{N}^*$  ».
  - (a) Ecrire l'évènement  $A_n$  en fonction des évènements  $(X_i = 0)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$  et  $(X_i \neq 0)_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ .
  - (b) En déduire  $\mathbb{P}(A_n)$ .
  - (c) Préciser  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$ .

**Exercice 2** Justifier l'existence puis calculer  $I = \int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$  à l'aide du changement de variable  $s = \pi - t$ .