

TD22 Intégration

Propriétés de l'intégrale

Exercice 1 Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c).$$

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \quad \Leftrightarrow \quad f \leq 0 \quad \text{OU} \quad f \geq 0.$$

Exercice 3 Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $x \rightarrow \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$ est lipschitzienne.

Limite d'intégrales

Exercice 4 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$

On pourra comparer le logarithme à une vitesse polynomiale bien choisie.

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$

Utiliser la continuité de l'exponentielle pour l'encadrer entre 1 et $1 + \varepsilon$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt$

Se ramener au cas précédent par un changement de variable.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Exercice 5 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Sommes de Riemann

Exercice 7 Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

a) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ b) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$ c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + nk^2}$ e) $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 8 Soit $\alpha > 0$. A l'aide des sommes de Riemann, déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$.

Suite définie par une intégrale

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e \ln^n(x) dx$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Etablir une relation entre I_n et I_{n+1} .
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < I_n < \frac{e}{n+1}.$$

4. Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n) .

Exercice 10 Pour tout entier n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$ et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en écrivant $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale, montrer que

$$\frac{1}{6(n+1)} \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

5. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Formule de Taylor

Exercice 11 Montrer que pour tout $x \in]-1; 1]$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

Exercice 12 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Fonction dont la variable est une borne d'intégration

Exercice 14 Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t)g(t) dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)g(t) dt.$$

2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t) dt.$$

3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

4. Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 15 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\text{sh}(t)}{t}, \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$$

1. Montrer que φ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f .
3. Justifier que f est \mathcal{C}^2 et calculer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 16 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $F : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt$$

1. Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3. Montrer que F est dérivable en 0 et observer que $F'(0) = 0$.

Intégration et algèbre linéaire

Exercice 17 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ et $T : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ f & \mapsto T(f) \end{cases}$ avec

$$T(f) : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^{3x} f(t) e^{-t^2} dt \end{cases}$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Soit f dans E , montrer que $T(f)$ est dérivable. Quelle est sa dérivée ?
3. T est-elle surjective ? Injective ?

Exercice 18 Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et soit φ l'application définie pour tout $f \in E$ par $\varphi(f) = g$ avec :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ .
3. Montrer que si f est bornée alors $\varphi(f)$ aussi.
4. Montrer que si $f \in E$ admet une limite l en $+\infty$ alors $\varphi(f)$ tend également vers l en $+\infty$.