# TD23
# Probabilités et Variables aléatoires

## Pour commencer

**Exercice 1** On lance $n$ fois une pièce équilibrée. On considère comme résultat le nombre de fois $k$ que l'on obtient face. Déterminer l'univers $\Omega$ et les probabilités élémentaires. Vérifier que la somme des probabilités élémentaires est égale à 1.

**Exercice 2** On lance un dé équilibré et on note $A$ et $B$ les événements « on obtient 1 » et « on obtient un nombre pair ». Vérifier que $\mathbb{P}\left(A \mid B\right) \neq 1 - \mathbb{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$.

**Exercice 3** Soient $A, B$ et $C$ trois événements d'un même univers probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On pose

$$E_1 = A \cap (B \cup C), \quad E_2 = A \cup (B \cap C), \quad E_3 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}.$$

On suppose que $\mathbb{P}(A) = 0,6$, $\mathbb{P}(B) = 0,4$, $\mathbb{P}(C) = 0,3$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(C \cap A) = 0,1$, $P(A \cap B \cap C) = 0,05$. Déterminer les probabilités des événements $E_1, E_2$ et $E_3$.

**Exercice 4** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et $A, B, C, A_1, \ldots, A_n$, des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

a) Montrer que : $\mathbb{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) \leqslant \mathbb{P}\left(A_1\right) + \ldots + \mathbb{P}\left(A_n\right)$.

b) Montrer que : $\mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right) \geqslant 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) - \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) - P\left(\overline{C}\right)$.

**Exercice 5** On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On note $X = 1$ si l'on a tiré deux dames et $X = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Reprendre la question 1. dans le cas où les deux cartes sont tirées :
   1. successivement, avec remise.
   2. successivement, sans remise.

**Exercice 6** Une urne contient 12 jetons marqués U, I, E, E, E, L, L, V, V, V, V, V. On tire successivement sans remise 5 jetons et on inscrit les lettre obtenues dans l'ordre du tirage pour obtenir un "mot". Quelle est la probabilité pour que le mot écrit soit ELEVE ?

**Exercice 7** Pendant une épidémie, on étudie un ensemble de familles ayant deux enfants en bas âge : une fille et un garçon. On constate que :

1. 20% des filles sont malades.
2. 40% des garçons sont malades.
3. Parmi les familles dont la fille est malade, le garçon est aussi malade dans 70% des cas.

On choisit au hasard une famille ayant participé à l'étude. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Les deux enfants sont malades.
2. Au moins un des enfants est malade.
3. Aucun des deux enfants n'est malade.
4. Sachant que le garçon est malade, la fille l'est aussi.
5. Sachant que le garçon n'est pas malade, la fille est malade.

## Formule des probabilités totales - Bayes

**Exercice 8** Le contrôle des voyageurs est assuré à un poste frontière par 3 douaniers : messieurs $X$, $Y$ et $Z$. Chaque voyageur est contrôlé par un douanier et un seul ; $X$ contrôle 2 voyageurs sur 10, $Y$ en contrôle 3 sur 10 et $Z$ en contrôle 5 sur 10. Le douanier $X$ détecte les fraudeurs une fois sur deux, le douanier $Y$ une fois sur trois et le douanier $Z$ une fois sur quatre. Quelle est la probabilité pour qu'un fraudeur se présentant au hasard à ce poste soit détecté ?

**Exercice 9** Une urne contient $n$ boules blanches et $n$ boules noires. On tire simultanément $n$ boules et on note $X$ le nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de $X$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

**Exercice 10** Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a 2 faces noires, un autre une face noire et une face blanche, le 3ème deux faces blanches. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait deux faces noires ?

**Exercice 11** On jette n dés équilibrés. On sait qu'au moins un dé a amené l'as. Qu'elle est la probabilité pour que l'on ait au moins deux as ?

**Exercice 12** On dispose de trois pièces de monnaie . La probabilité d'obtenir pile vaut 0,1 sur la première, 0,4 sur la deuxième et 0,6 sur la dernière. On choisit une pièce au hasard, quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

**Exercice 13** On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$. L'urne $U_k$, $k \in [\![1, n]\!]$ contient $k$ boules blanches et $n-k$ boules noires, on choisit l'urne $U_k$ avec une probabilité proportionnelle à $k$, on extrait une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

**Exercice 14** On lance un dé à six faces. Si le dé amène le numéro $k$, on lance $k$ fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile ?

**Exercice 15** Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition de 6 soit 1/2. On prend un dé au hasard, on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

**Exercice 16** M. Martin a perdu son parapluie. La probabilité qu'il l'ait perdu dans sa maison est $p$, $(p \in ]0,1[)$. Si le parapluie se trouve chez lui, la probabilité d'être dans l'une quelconque des 7 pièces vaut 1/7. M. Martin fouille les six premières pièces de fond en comble sans succès. quelle est la probabilité qu'il ait perdu son parapluie dans la 7ème pièce ?

## Synthèse

**Exercice 17** Pierre a deux pièces, l'une non truquée, l'autre faussée permet d'obtenir face avec une probabilité de 2/3. Il dispose de 2 stratégies :

1. Il lance une pièce. Si c'est Face, il joue avec cette pièce, sinon il joue avec l'autre et ne change plus de pièce.
2. S'il obtient Face, il rejoue avec la même pièce, s'il obtient Pile, il change de pièce.

Quel est la probabilité d'obtenir face au $n$-ème lancer ? (Répondez pour chacune des stratégies)

**Exercice 18** L'exploitation dispose de deux hangars H et H' pour le stockage du foin. Chaque jour on cherche le foin nécessaire dans l'un des deux hangars. Pour des raisons techniques si, un jour donné on utilise le hangar : H, le lendemain on réutilisera ce même hangar avec une probabilité de 0, 5 et si, un jour donné on utilise le hangar H', la probabilité d'utiliser le lendemain le hangar H est égale à 0, 4.
On veut analyser l'utilisation des deux hangars sur une longue période. Le premier jour on choisit le hangar $H$ avec une probabilité $p_0$. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $p_n$ la probabilité que le hangar H soit utilisé le $n$-ème jour.

1. a) Donner $p_1$  b) Calculer $p_2$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = 0,1p_n + 0,4$
3. (a) En déduire la valeur de $p_n$ pour tout entier naturel $n$ non nul.
   (b) Calculer : $\lim_{n\to+\infty} p_n$

**Exercice 19** On dispose de deux urnes $U_A$ et $U_B$. L'urne $U_A$ contient 3 boules noires et 2 boules blanches ; l'urne $U_B$ contient 1 boule noire et 4 boules blanches. On choisit au hasard une urne et on tire une boule dans cette urne. Si on tire une boule blanche on la remet et on tire dans la même urne, si on tire une boule noire on la remet et on tire dans l'autre urne. On note pour tout entier naturel non nul $n$ $A_n$ l'événement : "le $n$-ième tirage a lieu dans l'urne $U_A$" et on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Calculer la probabilité que les trois premiers tirages se fassent dans $U_A$.
2. Soit un entier, $n \geqslant 2$. Exprimer $a_n$ en fonction de $a_{n-1}$.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule noire au deuxième tirage.
4. Sachant qu'on tire une boule noire au deuxième tirage, calculer la probabilité qu'on ait tiré dans $U_A$ au premier tirage.

**Exercice 20** On étudie la transformation d'une information binaire, à travers des relais successifs notés $I_0$, $I_1, \dots, I_{n+1}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Par exemple, on envoie un signal électronique dont la valeur est soit « 1 » soit « 0 » à travers $n$ bornes. Pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, $I_k$ transmet l'information à $I_{k+1}$. Les relais ne sont pas fiables, et on fait l'hypothèse que chaque intermédiaire $I_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ transmet l'information qu'il reçoit de $I_{k-1}$ avec une probabilité $p$ indépendante de $k$ $(0 < p < 1)$ et l'information contraire à celle reçue de $I_{k-1}$ avec la probabilité $1-p$. Ainsi, deux erreurs successives se neutralisent.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on appelle $E_k$ l'évènement « $I_k$ transmet l'information initiale émise par $I_0$ » ; on pose $p_k = \mathbb{P}(E_k)$. Exprimer $p_{k+1}$ en fonction de $p_k$ et de $p$.

2. Calculer en fonction de $n$ et $p$ la probabilité que $I_{n+1}$ reçoive l'information émise par $I_0$.

3. Etudier la nature de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter.

4. Calculer en fonction de $p$ le nombre maximal de relais que l'on peut déployer pour que la probabilité de transmission du message initial reste supérieure à 0, 8. Application numérique pour $p = 0,9$, puis $p = 0,8$.

**Exercice 21** Dans une usine, un service contrôle les colis qui sont destinés à la livraison. Ce contrôle est effectué de façon indépendante pour tous les colis par deux personnes qui chacune détecte un colis non conforme dans 90% des cas. On sait d'autre part qu'il y a en moyenne 5% des colis qui sont non conformes.

1. (a) Calculer la probabilité qu'un colis soit non conforme et ne soit pas détecté.

(b) En déduire la probabilité qu'un colis soit non conforme et soit détecté.

2. Un lot de 100 colis est présenté au contrôle en vue d'une livraison.

(a) Quelle est la probabilité que les 100 colis soient conformes ?

(b) Quelle est la probabilité que les 100 colis soient déclarés bons pour la livraison ?

3. Calculer la probabilité que tous les colis qui passent le filtre du contrôle soient effectivement conformes ?

4. Calculer la probabilité qu'un colis non conforme au moins échappe au contrôle.

5. Quelle est la probabilité que seuls 95 colis sur les 100 passent le contrôle ?