Programme de colles 10 PREVISIONNEL
Espaces vectoriels et séries

Quinzaine du 10 au 21 mars

Espaces vectoriels

1. Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Définition d'une combinaison linéaire, d'un sous-espace vectoriel.
3. Caractérisation des sous-espaces vectoriels comme des sous-ensembles contenant 0_E et stables par combinaisons linéaires.
4. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. C'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion. Opérations élémentaires sur la famille sans changer l'espace engendré.
5. Intersection et somme de sous-espaces vectoriels.
6. Espaces en somme directe, espaces supplémentaires. Définition et caractérisation.
7. Familles finies de vecteurs : familles génératrices, libres, liées.
8. Cas des polynômes de degrés distincts.
9. Base d'un espace vectoriel. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
10. Théorème de la base adaptée.

Attention, aucun résultat pour le moment sur la dimension.

Séries numériques

1. Définitions : série, terme général d'une série, somme partielle, convergence, divergence, somme totale.
2. Deux séries qui coïncident à partir d'un certain rang ont même nature.
3. En cas de convergence, définition du reste d'ordre n. $R_n = S - S_n$ et $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. En cas de convergence, le terme général tend vers 0. Divergence grossière. Réciproque fausse.
5. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel. Linéarité de la somme.
6. Séries géométriques, séries télescopiques, série exponentielle.
7. Théorème de comparaison série-intégrale. Séries de Riemann.
8. Séries à termes positifs : théorème de comparaison.
9. Deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents ont même nature.
10. Convergence absolue : définition, CVA $\Rightarrow$ CV, inégalité triangulaire de la somme.
11. Série dominée ou négligeable devant une série absolument convergente.

Questions de cours

1. Montrer que la somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
2. Enoncer et démontrer la caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe par l'intersection.
3. Encadrement série-intégrale.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
L'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- Pour tout $z \in F+G$, il existe $(x,y) \in F \times G$ tel que $z = x+y$. Or $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$ donc
$$z = \underbrace{x}_{\in E} + \underbrace{y}_{\in E} \in E \qquad \text{car } E \text{ stable par somme.}$$
D'où $F+G \subseteq E$.
- Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F+G$.
- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(z,z') \in (F+G)^2$. Par définition, il existe $(x,y) \in F \times G$ tel que $z = x+y$ et de même il existe $(x',y') \in F \times G$ tel que $z' = x'+y'$. Donc
$$\begin{aligned}\lambda z + \mu z' &= \lambda(x+y) + \mu(x'+y')\\ &= \underbrace{\underbrace{\lambda x + \mu x'}_{\in F}}_{\text{car } F \text{ sous-espace vectoriel de } E} + \underbrace{\underbrace{\lambda y + \mu y'}_{\in G}}_{\text{car } G \text{ sous-espace vectoriel de } E} \in F+G.\end{aligned}$$
Donc $F+G$ est stable par combinaisons linéaires.

Par conséquent, l'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Proposition (démo 2)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a
$$F \oplus G \qquad \Leftrightarrow \qquad F \cap G = \{0_E\}.$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$. Supposons que $F \oplus G$. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$ donc x admet les deux décompositions suivantes
$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} \in F \oplus G.$$
Par unicité de la décomposition, car F et G sont en somme directe, on en déduit que $x = 0_E$ et $0_E = x$ donc $x \in \{0_E\}$ et donc $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. D'autre part $\{0_E\} \subseteq F \cap G$ (car $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel car F et G sont des sous-espaces vectoriels). Par conséquent, $F \cap G = \{0_E\}$. $(\Leftarrow)$. Réciproquement, on suppose que $F \cap G = \{0_E\}$. Montrons que F et G sont en somme directe. Soient $(x,x') \in F^2$ et $(y,y') \in G^2$ tels que
$$x + y = x' + y'.$$
Alors, on a
$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{\in F} - \underbrace{x'}_{\in F}}_{\in F}}_{\text{car } F \text{ sous-espace vectoriel}} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{y'}_{\in G} - \underbrace{y}_{\in G}}_{\in G}}_{\text{car } G \text{ sous-espace vectoriel}}$$
Donc le vecteur $z = x - x' = y' - y$ est à la fois un vecteur dans F et à la fois dans G : $z \in F \cap G$. Or $F \cap G = \{0_E\}$ par hypothèse. Donc $z = 0_E$ i.e. $x = x'$ et $y = y'$ ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition (démo 3)

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est décroissante. Alors pour tout $(q,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geqslant q \geqslant a+1$, on a
$$\int_q^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=q}^{p} f(k) \leqslant \int_{q-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant a$. Puisque f est décroissante sur $[a;+\infty[$, elle l'est également sur $[k;k+1]$ et donc pour tout $t \in [k;k+1]$,
$$f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k).$$
En intégrant cette inégalité sur $[k;k+1]$, on a par croissance de l'intégrale
$$\begin{aligned} & \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & f(k+1)\int_k^{k+1} 1\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)\int_k^{k+1} 1\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \qquad (\bigstar) \end{aligned}$$
On somme l'inégalité de droite entre q et p, on trouve :
$$\sum_{k=q}^{p}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=q}^{p} f(k).$$
Or, par la relation de Chasles,
$$\sum_{k=q}^{p}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_q^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{q+1}^{q+2} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_q^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Donc
$$\int_q^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=q}^{p} f(k).$$
De même par $(\bigstar)$, en prenant $\tilde{k} = k+1 \;\Leftrightarrow\; k = \tilde{k}-1$,
$$\forall k \geqslant a+1, \qquad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Donc en sommant entre q et p,
$$\sum_{k=q}^{p} f(k) \leqslant \int_{q-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Conclusion,
$$\int_q^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=q}^{p} f(k) \leqslant \int_{q-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
□