Corrigé - Banque PT - Maths A - 2024
Version pour juniors

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants.

Problème I : Probabilités

Ce problème est composé de 3 parties indépendantes, chacune d'elle étant l'étude d'un tirage différent dans un paquet de bonbons effectué par deux enfants Alice et Cyril.
Dans l'ensemble du problème :

- On dispose d'un paquet de bonbons qui contient uniquement des bonbons à la menthe et des nougats.
- On suppose que l'emballage des bonbons les rend indiscernables.
- Alice n'aime que les bonbons à la menthe et Cyril que les nougats.

Par ailleurs, on pourra utiliser les notations suivantes : pour tout entier $n \geqslant 1$,

- M_n est l'évènement « le n-ième bonbon tiré est un bonbon à la menthe » ;
- N_n est l'évènement « le n-ième bonbon tiré est un nougat ».

Partie A
Dans cette partie, le paquet de bonbons contient 10 nougats et 10 bonbons à la menthe. Alice tire 1 bonbon dans le paquet et le garde dans sa main puis Cyril fait de même.
On note :

- X_A la variable aléatoire égale à 1 si Alice tire un bonbon à la menthe et égale à 0 si Alice tire un nougat.
- X_C la variable aléatoire égale à 1 si Cyril tire un nougat et égale à 0 si Cyril tire un bonbon à la menthe.

1. (a) Déterminons la loi de X_A. Puisque X_A ne retourne que 0 ou 1, $X_A(\Omega) = \{0; 1\}$, on en déduit que X_A suit une loi de Bernoulli. De plus le paquet contient 10 bonbons à la menthe et 20 bonbons au total. Ainsi, $\mathbb{P}(X_A = 1) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Conclusion, X_A est une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$:
$$\boxed{X_A \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

   (b) Précisons l'espérance et la variance de X_A. D'après le cours, $E(X_A) = p = \frac{1}{2}$ et $V(X_A) = p(1-p) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Conclusion,
$$\boxed{E(X_A) = \frac{1}{2}, \qquad V(X_A) = \frac{1}{4}.}$$

2. (a) Calculons $P(X_A = 0, X_C = 0)$. Par la formule des probabilités composées,
$$P(X_A = 0, X_C = 0) = P(X_C = 0 \mid X_A = 0)\, P(X_A = 0).$$

Or on a $P(X_A=0) = 1 - P(X_A=1) = 1-p = \frac{1}{2}$ et $P(X_C=0 \mid X_A=0)$ correspond à la probabilité que Cyril tire un bonbon à la menthe, sachant qu'Alice a tiré un nougat. Il reste donc après le tirage d'Alice, 9 nougats et 10 bonbons à la menthe. D'où

$$P(X_C=0 \mid X_A=0) = \frac{10}{9+10} = \frac{10}{19}.$$

Ainsi,

$$\boxed{P(X_A=0, X_C=0) = \frac{10}{19}\frac{1}{2} = \frac{5}{19}.}$$

(b) Calculons la loi conjointe de X_A et X_C. De même qu'à la question précédente, on trouve que

$$\begin{aligned}
P(X_A=1, X_C=0) &= \frac{9}{19} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{38}\\
P(X_A=0, X_C=1) &= \frac{9}{19} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{38}\\
P(X_A=1, X_C=1) &= \frac{10}{19} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{38}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

X_A \ X_C	0	1
0	$\frac{10}{38}$	$\frac{9}{38}$
1	$\frac{9}{38}$	$\frac{10}{38}$

3. On note que X_C n'a que deux issues 0 et 1. Donc X_C suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$p_C = P(X_C=1).$$

Puisque $((X_A=0), (X_A=1))$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales :

$$p_C = P(X_A=0, X_C=1) + P(X_A=1, X_C=1) = \frac{9}{38} + \frac{10}{38} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion, X_C suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_C = 1/2$,

$$\boxed{X_C \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

4. (a) Vérifions que la covariance $\mathrm{Cov}(X_A, X_C)$ de X_A et X_C vaut $\frac{1}{76}$. Par définition,

$$\mathrm{Cov}(X_A, X_C) = E(X_A X_C) - E(X_A)E(X_C).$$

D'une part, par ce qui précède, on a $E(X_A) = E(X_C) = \frac{1}{2}$. D'autre part, par le théorème de transfert pour deux variables aléatoires,

$$E(X_A X_C) = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant 1} i \times j \times P(X_A=i, X_C=j) = 0 + P(X_A=1, X_C=1).$$

Par la question 2.b

$$\mathrm{Cov}(X_A, X_C) = \frac{10}{38} - \frac{1}{4} = \frac{20-19}{76} = \frac{1}{76}.$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_A, X_C) = \frac{1}{76}.}$$

(b) Montrons que les variables aléatoires X_A et X_C ne sont pas indépendantes.

Méthode 1. Par la question précédente, $\operatorname{Cov}(X_A, X_C) \neq 0$ DONC (la réciproque est fausse en général)

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_A \text{ et } X_C \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Méthode 2. Par la question 2.b $P(X_A = 1, X_C = 1) = \frac{10}{38} = \frac{5}{19}$ et on a aussi $P(X_A = 1) = P(X_B = 1) = \frac{1}{2}$ donc

$$P(X_A = 1) P(X_B = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{5}{19} = P(X_A = 1, X_C = 1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_A \text{ et } X_C \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Lorsqu'un enfant a tiré un bonbon qu'il n'aime pas, il le donne à l'autre enfant.
On note alors :

- Y_A la variable aléatoire égale au nombre de bonbons à la menthe détenus par Alice après les dons éventuels ;
- Y_C la variable aléatoire égale au nombre de nougats détenus par Cyril après les dons éventuels.

5. Justifions que l'univers image $Y_A(\Omega)$ de Y_A es égal à $\{0; 1; 2\}$. Après son propre tirage, Alice peut avoir gardé le bonbon (et en avoir 1) ou l'avoir donné à Cyril (et en avoir 0). Ensuite, Cyril pioche à son tour un bonbon qu'il peut donner à Alice (qui en a alors $1 + 1 = 2$ ou $0 + 1 = 1$) ou le garder (Alice reste donc avec 1 ou 0 bonbons). Ainsi, globalement, Alice peut n'avoir aucun bonbon, un seul ou deux :

$$\boxed{Y_A(\Omega) = \{0; 1; 2\}.}$$

6. (a) Déterminons la loi de $Y = Y_A + Y_C$. On observe que Y étant la somme des bonbons détenus par Alice avec ceux détenus par Cyril représente le nombre total de bonbons piochés. Puisqu'il y a deux tirages, Y suit une loi déterministe :

$$\boxed{Y = 2.}$$

(b) Démontrons que la covariance $\operatorname{Cov}(Y, Y_A)$ de Y et Y_A est nulle. Par définition,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y, Y_A) &= E(YY_A) - E(Y) E(Y_A) \\
&= YE(Y_A) - E(Y) E(Y_A) \qquad \text{par linéarité de l'espérance et car } Y \text{ est constant} \\
&= YE(Y_A) - YE(Y_A) \qquad \text{car } Y \text{ esr constant} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Cov}(Y, Y_A) = 0.}$$

(c) Démontrons que $\operatorname{Cov}(Y, Y_A) = V(Y_A) + \operatorname{Cov}(Y_A, Y_C)$. On sait que $Y = Y_A + Y_C$. Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y, Y_A) &= \operatorname{Cov}(Y_A + Y_C, Y_A) \\
&= \operatorname{Cov}(Y_A, Y_A) + \operatorname{Cov}(Y_C, Y_A) \qquad \text{par linéarité à gauche de la covariance} \\
&= V(Y_A) + \operatorname{Cov}(Y_A, Y_C).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Cov}(Y, Y_A) = V(Y_A) + \operatorname{Cov}(Y_A, Y_C).}$$

(d) Déduisons-en le signe de $\mathrm{Cov}(Y_A, Y_C)$. Par les deux questions précédentes, on a

$$0 = V(Y_A) + \mathrm{Cov}(Y_A, Y_C) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Cov}(Y_A, Y_C) = -V(Y_A).$$

Or en tant que variance, $V(Y_A) \geqslant 0$. D'où,

$$\boxed{\mathrm{Cov}(Y_A, Y_C) \leqslant 0.}$$

7. Justifions que $Y_A = 1 + X_A - X_C$. Lors du premier tirage, celui d'Alice, elle garde le bonbon s'il est à la menthe autrement dit si $X_A = 1$ et sinon elle n'en possède pas. Donc après le premier tirage, elle possède X_A bonbon. A l'inverse, durant le deuxième tirage, le gain d'Alice est de $1 - X_C$. Au total, elle possède alors,
$$\boxed{Y_A = X_A + 1 - X_C = 1 + X_A - X_C.}$$

8. Déduisons-en l'espérance de Y_A et démontrons que sa variance vaut $\frac{9}{19}$. Par la question précécente,
$$\begin{aligned} E(Y_A) &= E(1 + X_A - X_C) \\ &= 1 + E(X_A) - E(X_C) && \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} && \text{par les questions 1.b et 3.} \\ &= 1. \end{aligned}$$
De plus,
$$\begin{aligned} V(Y_A) &= V(1 + X_A - X_C) \\ &= V(X_A - X_C) \\ &= V(X_A) - 2\mathrm{Cov}(X_A, X_C) + V(X_C) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{76} + \frac{1}{4} && \text{par les questions 1.b, 4.a et 3.} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{38} \\ &= \frac{19-1}{38} \\ &= \frac{18}{38} \\ &= \frac{9}{19}. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{E(Y_A) = 1 \ \text{ et } \ V(Y_A) = \frac{9}{19}.}$$

9. A l'aide des résultats de la question précédente, justifions que la loi de Y_A n'est pas une loi binomiale. Procédons par l'absurde et supposons que Y_A suit une loi binomiale. Notons n et p ses paramètres : $Y_A \sim \mathscr{B}(n, p)$. Alors,
$$\begin{cases} E(Y_A) = np = 1 \\ V(Y_A) = np(1-p) = \frac{9}{19} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} np = 1 \\ 1 \times (1-p) = \frac{9}{19} \Leftrightarrow p = 1 - \frac{9}{19} = \frac{10}{19} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} n = \frac{1}{p} = \frac{19}{10} \notin \mathbb{N} \text{ absurde.} \\ p = \frac{10}{19} \end{cases}$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la loi de } Y_A \text{ n'est pas une loi binomiale.}}$$

Partie B

Dans cette partie, le paquet de bonbons contient 10 nougats et 6 bonbons à la menthe. Alice tire dans le paquet de bonbons 1 par 1. Si c'est un nougat, elle le remet dans le paquet. Si c'est un bonbon à la menthe, elle le mange. Les tirages s'arrêtent lorsque Alice a mangé deux bonbons.
On note :

- Z_1 la variable aléatoire égale au nombre de bonbons tirés au moment où Alice mange son premier bonbon ;
- Z_2 la variable aléatoire égale au nombre de bonbons tirés après qu'Alice a mangé le premier bonbon et au moment où Alice mange son deuxième bonbon.
- G_1 la fonction génératrice de Z_1.
- G_2 la fonction génératrice de Z_2.
- D_1 le domaine de définition de G_1 et D_2 celui de G_2.

On admet que les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendantes.
* On admettra dans toute cette partie que lorsqu'une variable aléatoire X a un univers image infini : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors toutes les formules/définitions du cours sur l'espérance, la variance, la fonction génératrice et le théorème de transfert restent vrais en remplaçant les sommes finies par des sommes totales $\sum_{k=1}^{+\infty} \ldots$.
Ceci EN CAS DE CONVERGENCE uniquement de la série numérique associée.

0. Soit $p \in \mathbb{R}$.

   (a) * Discutons, suivant la valeur de p, la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n-1}$. Si $p \in \left]-1;1\right[$, alors, on observe par croissance comparée que

   $$n^3p^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{i.e.} \quad np^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge absolument en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de négligeabilité des séries, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n-1}$ converge absolument et donc converge.
   A l'inverse, si $p \geqslant 1$, ou si $p \leqslant -1$, alors la **suite** $\left(np^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (par croissance comparée). Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n-1}$ diverge grossièrement et donc diverge.
   Conclusion,

   $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n-1} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad p \in \left]-1;1\right[.}$$

   (b) * Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}$. A l'aide d'un glissement d'indice, déterminons la valeur S_n en fonction de p et n. En posant $\tilde{k} = k - 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \left(\tilde{k}+1\right) p^{\tilde{k}} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)\, p^k - np^{n-1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} kp^k + \sum_{k=1}^{n} p^k - np^{n-1} \\
&= 1 + pS_n + \sum_{k=1}^{n} p^k - np^{n-1} \\
&= 1 + pS_n + p\frac{1-p^n}{1-p} - np^{n-1} \qquad \text{car on reconnait une somme géométrique.}
\end{aligned}$$

Dès lors, on obtient,

$$(1-p)\, S_n = 1 + p\frac{1-p^n}{1-p} - np^{n-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n = \frac{1-np^{n-1}}{1-p} + p\frac{1-p^n}{(1-p)^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{1-np^{n-1}}{1-p} + p\frac{1-p^n}{(1-p)^2}.}$$

(c) * Déduisons-en, lorsque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n-1}$ converge, la valeur de la somme totale associée $\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}$.
Soit $p \in \left]-1;1\right[$. Par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} = \frac{1-np^{n-1}}{1-p} + p\frac{1-p^n}{(1-p)^2}.$$

Or pour $p \in \left]-1;1\right[$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n-1}$ converge. De plus, par passage à la limite,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-np^{n-1}}{1-p} + p\frac{1-p^n}{(1-p)^2} \\
&= \frac{1}{1-p} + \frac{p}{(1-p)^2} \qquad \text{par croissance comparée car } p \in \left]-1;1\right[\\
&= \frac{1-p+p}{(1-p)^2} \\
&= \frac{1}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}.}$$

1. (a) i. * Déterminons $Z_1(\Omega)$ l'univers image de Z_1. Alice peut obtenir son premier bonbon à la menthe dès le premier tirage (avec probabilité $6/16$) mais peut aussi tirer un nougat, puis ensuite tirer un bonbon à la menthe. Ou retirer un nougat etc. Puisque les tirages des nougats, sont toujours avec remise, il est possible de tirer autant de nougats que souhaité à la suite. Ainsi,

$$\boxed{Z_1(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

ii. * Pour k dans $Z_1(\Omega)$, exprimons $(Z_1 = k)$ en fonction d'évènements M_k et N_k (définis en introduction) bien choisis. Pour réaliser $(Z_1 = k)$, il faut piocher des nougats durant les $k-1$ premiers tirages puis piocher un bonbon à la menthe :

$$(Z_1 = k) = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap M_k.$$

Conclusion,

$$\boxed{(Z_1 = k) = \bigcap_{i \in [\![1;k-1]\!]} N_i \cap M_k.}$$

iii. * Déduisons-en $P(Z_1 = k)$. Les évènements $(N_i)_{i \in [\![1;k-1]\!]}$ et M_k sont indépendants puisque les tirages sont avec remise. Dès lors,

$$\begin{aligned}
P(Z_1 = k) &= P\left(\bigcap_{i \in [\![1;k-1]\!]} N_i \cap M_k\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k-1} P(N_i) \times P(M_k) \\
&= \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{10}{16}\right) \times \frac{6}{16} \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P(Z_1 = k) = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{k-1}.}$$

(b) Donnons l'espérance et la variance de Z_1. Par définition,

$$E(Z_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Z_1 = k).$$

Donc par la question précédente,

$$E(Z_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{k-1}.$$

Posons $p = \frac{5}{8}$. On a, par la question 0.c

$$\begin{aligned}
E\left(Z_1\right) &= \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} \\
&= \frac{3}{8}\frac{1}{\left(1-p\right)^2} \\
&= \frac{3}{8}\frac{1}{\left(1-\frac{5}{8}\right)^2} \\
&= \frac{3}{8}\frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

De plus, par la formule de Koenig-Huygens

$$V\left(Z_1\right) = E\left(Z_1^2\right) - E\left(Z_1\right)^2.$$

Par le théorème de transfert,

$$E\left(Z_1^2\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P\left(Z_1 = k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{k-1}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 p^{k-1}.$$

Par le changement d'indice $\tilde{k} = k-1$, on obtient,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+1\right)^2 p^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(k+1\right)^2 p^k - \left(n+1\right)^2 p^n \\
&= 1 - \left(n+1\right)^2 p^n + p\sum_{k=1}^{n} k^2 p^{k-1} + 2p\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} p^k \\
&= 1 - \left(n+1\right)^2 p^n + pT_n + 2pS_n + p\frac{1-p^n}{1-p}.
\end{aligned}$$

Dès lors, par la question 0.b

$$\left(1-p\right)T_n = 1 - \left(n+1\right)^2 p^n + 2p\left(\frac{1-np^{n-1}}{1-p} + p\frac{1-p^n}{\left(1-p\right)^2}\right) + p\frac{1-p^n}{1-p}.$$

Or de même que précédemment, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} k^2 p^{k-1}$ converge pour tout $p \in \left]-1;1\right[$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p^{k-1} &= \frac{1}{1-p}\left(1 - 0 + 2p \times \frac{1}{\left(1-p\right)^2} + \frac{p}{1-p}\right) \\
&= \frac{\left(1-p\right)^2 + 2p + p\left(1-p\right)}{\left(1-p\right)^3} \\
&= \frac{1-2p+p^2+2p+p-p^2}{\left(1-p\right)^3} \\
&= \frac{1+p}{\left(1-p\right)^3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $p = \frac{5}{8}$, on obtient,

$$\begin{aligned} E\left(Z_1^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{8}\frac{1+\frac{5}{8}}{\left(1-\frac{5}{8}\right)^3} \\ &= \frac{13/8}{(3/8)^2} \\ &= \frac{13\times 8}{9} \\ &= \frac{104}{9}. \end{aligned}$$

Puis,

$$V\left(Z_1\right) = \frac{104}{9} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{104}{9} - \frac{64}{9} = \frac{40}{9}.$$

Conclusion,

$$\boxed{E\left(Z_1\right) = \frac{8}{3} \quad \text{et} \quad V\left(Z_1\right) = \frac{40}{9}.}$$

(c) Justifions que pour tout $t \in D_1$, $G_1(t) = \frac{3}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}t\right)^k$ et déterminer D_1. Par définition, pour tout $t \in D_1$,

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} t^k P\left(Z_1 = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{3}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{k-1} \qquad \text{par la question 1.(a)iii} \qquad = \frac{3}{8}\frac{8}{5}\sum_{k=1}^{+\infty} t^k\left(\frac{5}{8}\right)^k \\ &= \frac{3}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}t\right)^k. \end{aligned}$$

Dès lors, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} t \in D_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{5}{8}t\right)^n \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{5}{8}t\right| < 1 \qquad \text{car on reconnait une série géométrique} \\ &\Leftrightarrow \quad |t| < \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in D_1,\ G_1(t) = \frac{3}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}t\right)^k \quad \text{et} \quad D_1 = \left]-\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right[.}$$

(d) Déterminons pour tout $t \in D_1$, l'expression de $G_1(t)$ à l'aide des fonctions usuelles. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \forall t \in D_1,\ G_1(t) &= \frac{3}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}t\right)^k \\ &= \frac{3}{5}\frac{5t}{8}\frac{1}{1-\frac{5}{8}t} \qquad \text{car on reconnait la somme totale d'une somme géométrique} \\ &= \frac{3t}{8-5t}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in D_1 = \left]-\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right[, \ G_1(t) = \frac{3t}{8-5t}.}$$

(e) * Déterminons le développement limité à l'ordre n de G_1 en 0. Par la question précédente, au voisinage de 0, on a

$$G_1(t) = \frac{3t}{8-5t} = \frac{3t}{8}\frac{1}{1-\frac{5t}{8}}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} G_1(t) &\underset{t\to 0}{=} \frac{3t}{8}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{5t}{8}\right)^k + o\left(\left(\frac{5t}{8}\right)^{n-1}\right)\right) &&\underset{t\to 0}{=} \frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{5t}{8}\right)^{k+1} + o\left(t^n\right) \\ &\underset{t\to 0}{=} \frac{3}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5t}{8}\right)^{k} + o\left(t^n\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{G_1(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{3}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5t}{8}\right)^{k} + o\left(t^n\right).}$$

(f) Déterminons la valeur de $G_1^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et précisons $G_1(0)$. Par la question 1.d $\forall t \in D_1$, $G_1(t) = \frac{3t}{8-5t}$. Donc la fonction G_1 est $\mathscr{C}^\infty$ sur D_1 comme quotient de fonctions qui le sont. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, G_1 est $\mathscr{C}^n$ et par la formule de Taylor-Young,

$$G_1(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{G_1^{(k)}(0)}{k!}t^k + o\left(t^n\right).$$

Donc par la question précédente et l'unicité du développement limité,

$$G_1^{(0)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1;n]\!], \ \frac{G_1^{(k)}(0)}{k!} = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{8}\right)^k.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on conclut,

$$\boxed{G_1^{(0)}(0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \ G_1^{(k)}(0) = k!\frac{3}{5}\left(\frac{5}{8}\right)^k.}$$

2. Donnons, sans les justifier la loi de Z_2, son espérance et sa variance, D_2, $G_2(0)$ et $G_2^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On observe que Z_2 va avoir la même loi que Z_1 mais en modifiant les probabilités. Puisque Alice a mangé un bonbon à la menthe, il reste 5 bonbons à la menthe parmi 15 bonbons. En modifiant les probabilités, $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ devient alors $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ et $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ devient alors $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. On obtient alors, $E\left(Z_2\right) = 3$ mais aussi

$$\begin{aligned} V\left(Z_2\right) &= \frac{1}{3}\frac{1+\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3} - 3^2 \\ &= \frac{1}{3}\frac{\frac{5}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} - 9 \\ &= 15 - 9 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{E\left(Z_2\right)=3 \quad \text{et} \quad V\left(Z_2\right)=6.}$$

De plus,

$$\boxed{D_2=\left]-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right[, \qquad G_2^{(0)}(0)=0 \text{ et } \forall k\in[\![1;n]\!],\ G_2^{(k)}(0)=k!\frac{1/3}{2/3}\left(\frac{2}{3}\right)^k=k!\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k.}$$

3. On pose $Z=Z_1+Z_2$ et on note G la fonction génératrice de Z.

(a) Précisons ce que représente Z et son espérance. Par somme de Z_1 et Z_2,

$\boxed{Z \text{ représente le nombre total de bonbons piochés au moment où Alice mange son deuxième bonbon.}}$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$E\left(Z\right)=E\left(Z_1+Z_2\right)=E\left(Z_1\right)+E\left(Z_2\right)=\frac{8}{3}+3=\frac{17}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{E\left(Z\right)=\frac{17}{3}.}$$

(b) Donnons l'univers image de $Z\left(\Omega\right)$ de Z. Son deuxième bonbon ne peut être obtenu qu'à partir du rang 2 et à n'importe quel rang suivant :

$$\boxed{Z\left(\Omega\right)=\mathbb{N}\setminus\{0;1\}.}$$

(c) Exprimons pour tout $t\in D_1\cap D_2$, $G(t)$ en fonction de $G_1(t)$ et $G_2(t)$. D'après l'énoncé, Z_1 et Z_2 sont indépendantes. Dès lors,

$$\forall t\in D_1\cap D_2, \quad G(t)=G_Z(t)=G_{Z_1+Z_2}(t)=G_{Z_1}(t)G_{Z_2}(t)=G_1(t)G_2(t).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t\in D_1\cap D_2, \quad G(t)=G_1(t)G_2(t).}$$

(d) A l'aide de la formule de Leibniz, exprimons pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $G^{(n)}(0)$ en fonction de $G_1^{(k)}(0)$ et $G_2^{(k)}(0)$ pour des valeurs non nulles de k bien choisies. Soit $n\geqslant 2$. Par la formule de Leibniz,

$$G^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_1^{(k)}(0)G_2^{(n-k)}(0).$$

Or $G_1^{(0)}(0)=0$ et $G_2^{(0)}(0)=0$. Conclusion, comme $n\geqslant 2$,

$$\boxed{G^{(n)}(0)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}G_1^{(k)}(0)G_2^{(n-k)}(0).}$$

(e) Déduisons-en que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $G^{(n)}(0) = 3n!\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right)$. Soit $n \geqslant 2$. Par la question précédente puis les questions 1.f et 2.

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(0) &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} G_1^{(k)}(0) G_2^{(n-k)}(0) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k! \frac{3}{5}\left(\frac{5}{8}\right)^k (n-k)! \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} k! \frac{3}{10}\left(\frac{5}{8}\right)^k (n-k)! \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= \frac{3}{10} n! \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{8}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= \frac{3}{10} n! \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{15}{16}\right)^k \\
&= \frac{3}{10} n! \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{15}{16} \frac{1-\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}}{1-\frac{15}{16}} \\
&= 3n! \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{3}{32} \frac{16}{16-15} \left(1-\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}\right) \\
&= 3n! \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{3}{2} \left(1-\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}\right) \\
&= 3n! \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(1-\left(\frac{15}{16}\right)^{n-1}\right) \\
&= 3n! \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad G^{(n)}(0) = 3n! \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right).}$$

(f) Déduisons-en $P(Z = n)$ pour tout $n \in Z(\Omega)$. On sait que pour tout $t \in D_1$, $G_1(t) = \frac{3t}{8-5t}$ et de même, on a pour tout $t \in D_2$, $G_2(t) = \frac{t}{3-2t}$. Donc

$$\forall t \in D_1 \cap D_2, \quad G(t) = \frac{3t}{8-5t}\frac{t}{3-2t}.$$

La fonction G est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$\begin{aligned}
D_1 \cap D_2 &= \left]-\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right[\cap \left]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right[\\
&= \left]-\frac{16}{10}; \frac{16}{10}\right[\cap \left]-\frac{15}{10}; \frac{15}{10}\right[\\
&= \left]-\frac{15}{10}; \frac{15}{10}\right[\\
&= \left]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right[,
\end{aligned}$$

qui est un voisinage de 0 donc par la formule de Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n).$$

D'autre part, par définition, on a

$$G(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}t^kP\left(Z=k\right)=\sum_{k=0}^{n}t^kP\left(Z=k\right)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}t^kP\left(Z=k\right).$$

Or

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}t^kP\left(Z=k\right)\right| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}t^kP\left(Z=k\right) \qquad \text{car les termes sont positifs}\\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}t^k\\ &= t^{n+1}\frac{1}{1-t}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} o\left(t^n\right).\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty}t^kP\left(Z=k\right)\underset{n\to+\infty}{=} o\left(t^n\right)$. Ainsi,

$$G(t)\underset{n\to+\infty}{=}\sum_{k=0}^{n}t^kP\left(Z=k\right)+o\left(t^n\right).$$

Dès lors, par unicité du développement limité,

$$\forall k\in[\![0;n]\!],\quad P\left(Z=k\right)=\frac{G^{(k)}(0)}{k!}.$$

Ceci étant vrai pour $n\in\mathbb{N}$ quelconque, on en déduit, par la question précédente que, pour tout $n\geqslant 2$,

$$\boxed{P\left(Z=n\right)=\frac{G^{(n)}(0)}{n!}=3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right).}$$

(g) En utilisant la définition de l'espérance, retrouvons la valeur de l'espérance de Z. On a

$$E\left(Z\right)=\sum_{n=2}^{+\infty}nP\left(Z=n\right).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}E\left(Z\right)&=\sum_{n=2}^{+\infty}3n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right)\\ &=3\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\\ &=3\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1-\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}+1\right)\\ &=3\left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}-\frac{1}{(1-\frac{5}{8})^2}\right) \qquad \text{par la question 0.c}\\ &=3\left(9-\frac{64}{9}\right)\\ &=\frac{17}{3}.\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien

$$\boxed{E\left(Z\right)=\frac{17}{3}.}$$

Partie C

Dans cette partie, la proportion des bonbons à la menthe dans le paquet est notée a et celle des nougats est notée c avec $(a, c) \in \left]0;1\right[^2$.
Le tirage des bonbons dans le paquet répond au protocole suivant :

- Les enfants tirent à tour de rôle un bonbon dans le paquet.
- Lorsqu'un enfant tire un bonbon qu'il aime, il le mange, sinon il le remet dans le paquet.
- Les tirages s'arrêtent dès qu'un enfant a mangé un bonbon.
- Cyril effectue le premier tirage.

On note B la variable aléatoire égale à 1 si c'est Cyril qui a mangé un bonbon, égale à 0 si c'est Alice qui a mangé un bonbon et égale à -1 dans les autres cas.

1. Justifions que $a + c = 1$. Puisque le paquet ne contient que des bonbons à la menthe et des nougats, la somme des proportions vaut nécessairement 1 :

$$\boxed{a + c = 1.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. On note C_n l'évènement : « Cyril a mangé un nougat au n-ième tirage ».

   (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimons C_{2p+1} en fonction d'évènements M_k et N_k (définis en introduction) bien choisis. Pour que Cyril mange un nougat au tirage $2p+1$ il faut qu'à tous les tirages précédents, chaque enfant n'obtienne pas son bonbon préféré. Donc au premier tirage Cyril obtient un bonbon à la menthe puis Alice un nougat puis Cyril un bonbon à la menthe etc. Ainsi,

$$C_{2p+1} = M_1 \cap N_2 \cap M_3 \cap \cdots \cap M_{2p-1} \cap N_{2p} \cap N_{2p+1} = \left[\bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} (M_{2i-1} \cap N_{2i}) \right] \cap N_{2p+1}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{C_{2p+1} = \left[\bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} (M_{2i-1} \cap N_{2i}) \right] \cap N_{2p+1},}$$

   avec la convention que $\bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} (M_{2i-1} \cap N_{2i}) = \emptyset$ si $p = 0$.

   (b) Déduisons-en $P(C_{2p+1})$ pour $p \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$P(C_{2p+1}) = P\left(\left[\bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} (M_{2i-1} \cap N_{2i}) \right] \cap N_{2p+1} \right).$$

   Or les tirages (jusqu'à ce que le bonbon soit mangé) sont avec remises et donc indépendants. Dès lors,

$$\begin{aligned} P(C_{2p+1}) &= P(N_{2p+1}) \prod_{i \in [\![1;p]\!]} (P(M_{2i-1}) P(N_{2i})) \\ &= c \prod_{i \in [\![1;p]\!]} ac \\ &= a^p c^{p+1} \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{P(C_{2p+1}) = a^p c^{p+1}.}$$

(c) Précisons C_{2p} et $P(C_{2p})$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Puisque Cyril ne pioche qu'au tirages d'indice impair, on a

$$\boxed{C_{2p} = \emptyset \quad \text{et} \quad P(C_{2p}) = 0.}$$

(d) Etablissons à l'aide des questions précédentes que $P(B=1) = \frac{c}{1-ac}$. On note que

$$(B=1) = \sqcup_{p\in\mathbb{N}} C_{2p+1}.$$

Dès lors, puisque l'union est disjointe,

$$\begin{aligned} P(B=1) &= \sum_{p=0}^{+\infty} P(C_{2p+1}) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} a^p c^{p+1} \qquad \text{par la question précédente} \\ &= c\sum_{p=0}^{+\infty} (ac)^p . \end{aligned}$$

Or $(a,c) \in]0;1[^2$, donc $0 < ac < 1$, la série géométrique est donc convergente et de plus,

$$P(B=1) = c\frac{1}{1-ac}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P(B=1) = \frac{c}{1-ac}.}$$

(e) Démontrons de même que $P(B=0) = \frac{a^2}{1-ac}$. L'évènement $(B=0)$ correspond au fait qu'Alice mange un bonbon à la menthe. En notant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, D_k : « Alice pioche un bonbon à la menthe au tirage k », on a pour tout $p \geqslant 2$,

$$D_{2p} = \left[\bigcap_{i\in[\![1;p-1]\!]} (M_{2i-1} \cap N_{2i})\right] \cap M_{2p-1} \cap M_{2p},$$

et $D_2 = M_1 \cap M_2$. Ainsi, par indépendance,

$$P(D_{2p}) = P(M_{2p-1})\,P(M_{2p}) \prod_{i\in[\![1;p-1]\!]} P(M_{2i-1})\,P(N_{2i}) = a^2 \prod_{i\in[\![1;p-1]\!]} (ac) = a^{p+1}c^{p-1},$$

encore vrai si $p = 1$. Or

$$(B=0) = \sqcup_{p\in\mathbb{N}^*} D_{2p}.$$

Les évènements étant disjoints,

$$\begin{aligned} P(B=0) &= \sum_{p=1}^{+\infty} P(D_{2p}) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} a^{p+1}c^{p-1} \\ &= \frac{a}{c}\sum_{p=1}^{+\infty} (ac)^p \\ &= \frac{a}{c}\frac{ac}{1-ac} \\ &= \frac{a^2}{1-ac}. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{P(B=0)=\frac{a^2}{1-ac}.}$$

(f) Déduisons-en la valeur de $P(B=-1)$ et interprétons ce résultat. Par les questions précédentes,

$$\begin{aligned}P(B=-1)&=1-P(B=0)-P(B=1)\\&=1-\frac{c}{1-ac}-\frac{a^2}{1-ac}\\&=\frac{1-ac-c-a^2}{1-ac}.\end{aligned}$$

Or $a+c=1$ donc

$$\begin{aligned}P(B=-1)&=\frac{1-a(c+a)-c}{1-ac}\\&=\frac{1-a-c}{1-ac}\\&=\frac{1-1}{1-ac}\\&=0.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P(B=-1)=0.}$$

On est donc certain qu'en temps fini ou Alice ou Cyril trouvera son bonheur (ou encore il est impossible que l'expérience dure infiniment).

(g) Regardons s'il est possible de posséder un paquet de bonbons tel que Alice et Cyril aient autant de chance l'un que l'autre de manger un bonbon. Cette situation est réalisée si et seulement si

$$P(B=0)=P(B=1)\qquad\Leftrightarrow\qquad\frac{c}{1-ac}=\frac{a^2}{1-ac}\qquad\Leftrightarrow\qquad c=a^2.$$

Or $c=1-a$ donc cela revient à résoudre :

$$a^2+a-1=0.$$

Le discriminant associé vaut $\Delta=1+4=5$ donc on obtient,

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\qquad\text{OU}\qquad a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0.$$

Or a représente une proportion de bonbons donc ne peut pas être négatif, donc $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Cependant $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\notin\mathbb{Q}$ et a en tant que proportion de bonbons doit être rationnel, ce qui est contradictoire. Conclusion,

$$\boxed{\text{il est impossible de prévoir un paquet de bonbons pour que le jeu soit équilibré.}}$$

Problème II : Algèbre

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit φ l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par :

$$\forall (P,Q)\in(\mathbb{R}_3[X])^2,\quad \varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{3}P(k)Q(k).$$

On considère également les polynômes $L_p(X)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{3}\frac{X-k}{p-k}$ pour $p\in\{0;1;2;1\}$.

1. (a) Vérifions que $L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$. Par définition,

$$L_0(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq 0}}^{3} \frac{X-k}{0-k} = \frac{X-1}{0-1}\frac{X-2}{0-2}\frac{X-3}{0-3} = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3).$$

Conclusion,

$$\boxed{L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3).}$$

(b) Ecrivons de même $L_1(X)$, $L_2(X)$ et $L_3(X)$. On a

$$\begin{aligned}L_1(X) &= \frac{X-0}{1-0}\frac{X-2}{1-2}\frac{X-3}{1-3} = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3)\\ L_2(X) &= \frac{X-0}{2-0}\frac{X-1}{2-1}\frac{X-3}{2-3} = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3)\\ L_3(X) &= \frac{X-0}{3-0}\frac{X-1}{3-1}\frac{X-2}{3-2} = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{aligned}L_1(X) &= \frac{1}{2}X(X-2)(X-3),\\ L_2(X) &= -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3),\\ L_3(X) &= \frac{1}{6}X(X-1)(X-2).\end{aligned}}$$

(c) Déterminons les valeurs de $L_p(k)$ pour tout $(p,k) \in [\![0;3]\!]^2$. On observe que

$$L_0(0) = -\frac{1}{6}(-6) = 1.$$

Et pour tout $k \in [\![1;3]\!]$, $L_0(k) = 0$. De même pour les autres polynômes, on en déduit :

$$\boxed{\forall (p,k) \in [\![0;3]\!]^2,\ L_p(k) = \delta_{p,k} = \begin{cases}1 & \text{si } p = k\\ 0 & \text{si } p \neq k.\end{cases}}$$

2. (a) Démontrons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$. On note que φ est bien définie sur $\mathbb{R}_3[X]^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus,

- *Linéarité à droite.* Pour tout $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_3[X]^3$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\varphi(P, \lambda Q + \mu R) &= \sum_{k=0}^{3} P(k)(\lambda Q + \mu R)(k)\\ &= \sum_{k=0}^{3} (\lambda P(k)Q(k) + \mu P(k)R(k))\\ &= \lambda \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k) + \mu \sum_{k=0}^{3} P(k)R(k)\\ &= \lambda\varphi(P,Q) + \mu\varphi(P,R).\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche.

- *Symétrie.* On a également,

$$\begin{aligned}\varphi(Q,P) &= \sum_{k=0}^{3} Q(k)P(k)\\ &= \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k)\\ &= \varphi(P,Q)\,.\end{aligned}$$

  Donc φ est symétrique. Donc par la symétrie à gauche, on en déduit que φ est aussi symétrique à droite et donc bilinéaire.
- *Positive.* Aussi,

$$\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{3} \underbrace{P(k)^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

  Donc φ est positive.
- *Définie.* Enfin, si $\varphi(P,P) = 0$, alors,

$$\sum_{k=0}^{3} P(k)^2 = 0.$$

  Les termes de la somme étant positifs, pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, $P(k) = 0$. Or $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Donc P possède au moins 4 racines et est de degré au plus 3. Donc P a davantage de racines que son degré. Nécessairement, $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Donc φ est bien définie positive.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}_3[X].}$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

(b) Vérifions que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire. On observe les points suivants :

- Pour tout $p \in [\![0;3]\!]$, $L_p \in \mathbb{R}_3[X]$. Donc $\mathscr{L}$ est une famille de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Soit $p \in [\![0;3]\!]$,

$$\|L_p\| = \sum_{k=0}^{3} L_p(k) = L_p(p) = 1 \qquad \text{par la question 1.c}$$

  Donc la famille $\mathscr{L} = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ est normée.
- Pour tout $(p,q) \in [\![0;3]\!]^2$, $p \neq q$,

$$\varphi(L_p, L_q) = \sum_{k=0}^{3} L_p(k)L_q(k).$$

  Or par la question 1.c si $k \neq p$ ou si $k \neq q$, $L_p(k)L_q(k) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\varphi(L_p, L_q) &= L_p(p)L_q(p) + L_p(q)L_q(q) \qquad \text{car } p \neq q\\ &= 0\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{L}$ est orthogonale.
- *On pourrait alors affirmer directement que la famille $\mathscr{L}$ est libre. En effet, d'après le cours de deuxième année :*

  *Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est nécessairement libre.*

Démontrons-le dans le cas présent. Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![0;3]\!]} \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\sum_{k=0}^{3} \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Alors, en évaluant en $p \in [\![0;3]\!]$, on obtient par la question 1.c

$$\lambda_p = 0.$$

Donc $\mathscr{L}$ est libre. Enfin, comme $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$,

$$\mathscr{L} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{L} = (L_0, L_1, L_2, L_3) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_3[X].}$$

(c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. * Démontrons que

$$Q = \sum_{k=0}^{3} \varphi(Q, L_k) L_k.$$

Et déduisons-en, en fonction de Q, les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3). Ceci est un résultat de cours de deuxième année (les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée). Démontrons-le ici. Puisque $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ par la question précédente, il existe $(a_k)_{k\in[\![0;3]\!]} \in \mathbb{R}^4$, les coordonnées de Q, tel que

$$Q = \sum_{k=0}^{3} a_k L_k.$$

Soit $p \in [\![0;3]\!]$, calculons,

$$\begin{aligned}
\varphi(Q, L_p) &= \varphi\left(\sum_{k=0}^{3} a_k L_k, L_p\right) \\
&= \sum_{k=0}^{3} a_k \varphi(L_k, L_p) \qquad \text{par linéarité à gauche} \\
&= a_p \qquad \text{par la question 1.c}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien que

$$\boxed{Q = \sum_{k=0}^{3} \varphi(Q, L_k) L_k}$$

et les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3) sont données par les $\varphi(Q, L_i)$, $i \in [\![0;3]\!]$. Or on a pour $i \in [\![0;3]\!]$,

$$\varphi(Q, L_i) = \sum_{k=0}^{3} Q(k) L_i(k) = Q(i) \qquad \text{d'après la question 1.c}$$

Conclusion, les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3) sont :

$$\boxed{(Q(0), Q(1), Q(2), Q(3)).}$$

3. (a) * Calculons $E_1 = \frac{1}{\|1\|}$. Par définition,

$$\|1\|^2 = \varphi(1,1) = \sum_{k=0}^{3} 1 \times 1 = 4.$$

Ainsi,

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{2}.}$$

(b) * Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V_1 = X - \lambda E_1$. Déterminons λ pour que V_1 soit orthogonal à E_1. Par linéarité à gauche de φ,

$$\varphi(V_1, E_1) = \varphi(X - \lambda E_1, E_1) = \varphi(X, E_1) - \lambda \varphi(E_1, E_1) = \varphi(X, E_1) - \lambda \|E_1\|^2 = \varphi(X, E_1) - \lambda.$$

Dès lors,

$$V_1 \perp E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(V_1, E_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \varphi(X, E_1).$$

Or

$$\varphi(X, E_1) = \sum_{k=0}^{3} k \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{3 \times 4}{2} = 3.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lambda = 3 \text{ et donc } V_1 = X - \frac{3}{2}.}$$

(c) * Calculons $E_2 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$. On a

$$\begin{aligned}
\|V_1\|^2 &= \sum_{k=0}^{3} \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{3} k^2 - 3 \sum_{k=0}^{3} k + \frac{9}{4} \sum_{k=0}^{3} 1 \\
&= \frac{3 \times 4 \times 7}{6} - 3 \frac{3 \times 4}{2} + 9 \\
&= 14 - 18 + 9 \\
&= 5.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{E_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(X - \frac{3}{2}\right).}$$

(d) * Montrons que (E_1, E_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$. Soit $\mathscr{B}_E = (E_1, E_2)$. On note que les vecteurs de $\mathscr{B}_E$ appartiennent bien à $\mathbb{R}_1[X]$. De plus, la famille $\mathscr{B}_E$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires et $\operatorname{Card}(\mathscr{B}_E) = 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$. Donc $\mathscr{B}_E$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. De plus, par ce qui précède, $E_1 = \frac{1}{\|1\|}$ et $E_2 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$ sont normés. Enfin, par le choix de λ, V_1 est orthogonal à E_1 et comme E_2 est colinéaire à V_1, on en déduit que E_2 est aussi orthogonal à E_1. Conclusion,

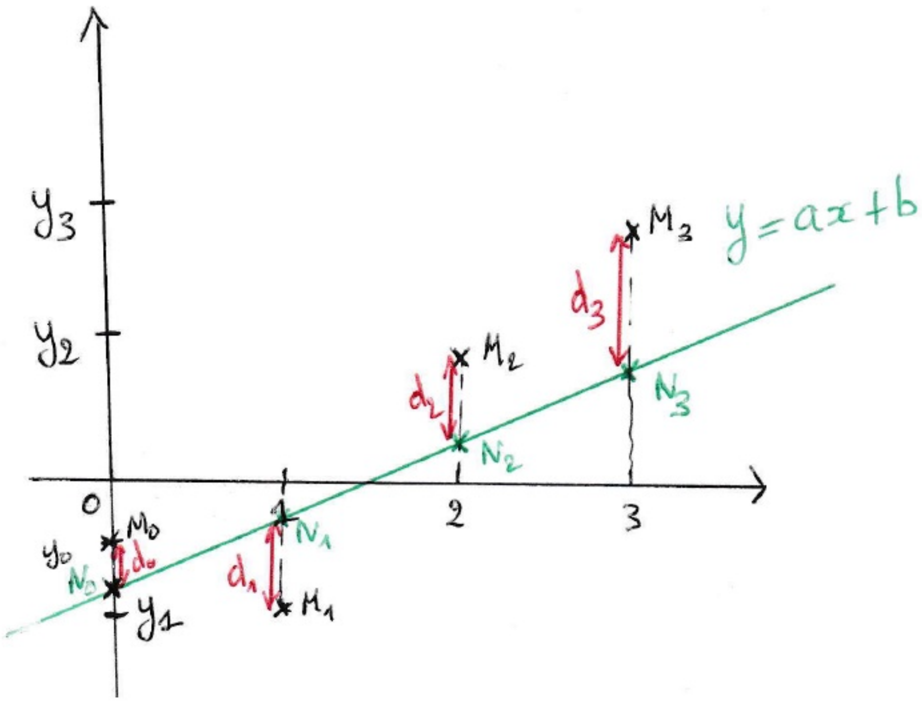
$$\boxed{(E_1, E_2) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_1[X].}$$

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère désormais 6 réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$. Pour tout $p \in [\![0; 3]\!]$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p), N_p le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_p N_p]$.

On pose $\delta(a, b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2$.

L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a, b)$ est minimale.

4. Voici un schéma qui illustre les données précédentes :



5. Vérifions que $\delta(a, b) = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2$. Par définition, pour tout $p \in [\![0; 3]\!]$,

$$\begin{aligned} d_p &= \sqrt{\left(x_{M_p} - x_{N_p}\right)^2 + \left(y_{M_p} - y_{N_p}\right)^2} \\ &= \sqrt{(p-p)^2 + (y_p - (ap+b))^2} \\ &= \sqrt{(y_p - ap - b)^2} \\ &= |y_p - ap - b|\,. \end{aligned}$$

Or $\delta(a, b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2$. Conclusion,

$$\boxed{\delta(a, b) = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2\,.}$$

6. Démontrons qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in [\![0; 3]\!]$.

Analyse/Unicité. Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3. Cela signifie que pour tout $p \in [\![0; 3]\!]$, $Q(p) = y_p$. Or par la question 2.c

$$Q = \sum_{k=0}^{3} \varphi(Q, L_p)\, L_p = \sum_{k=0}^{3} Q(p) L_p.$$

Ainsi,

$$Q = \sum_{k=0}^{3} y_p L_p.$$

Ce qui démontre que Q est entièrement déterminé et donc unique.

Synthèse/Existence. Posons $Q = \sum_{k=0}^{3} y_p L_p$. Alors comme combinaison linéaire de polynômes de degré 3, Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 : $Q \in \mathbb{R}_3[X]$. De plus pour tout $k \in [\![0;3]\!]$,

$$Q(k) = \sum_{k=0}^{3} y_p L_p(k) = y_k \qquad \text{par la question 1.c}$$

Donc Q est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

Conclusion,

$$\boxed{\text{il existe un unique polynôme } Q \text{ de } \mathbb{R}_3[X] \text{ dont le graphe passe par les points } M_0,\ M_1,\ M_2 \text{ et } M_3.}$$

7. Démontrons que $\delta(a,b) = \|Q-H\|^2$ où $H = aX+b$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\|Q-H\|^2 &= \varphi(Q-H, Q-H) \\
&= \sum_{p=0}^{3} (Q-H)^2(p) \\
&= \sum_{p=0}^{3} (Q(p)-H(p))^2 \\
&= \sum_{p=0}^{3} (y_p - (ap+b))^2 \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&= \delta(a,b) \qquad \text{par la question 5.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\delta(a,b) = \|Q-H\|^2.}$$

8. En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, déduisons-en l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0.

   On précisera le lien entre Q et H_0.

   On cherche

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \delta(a,b) = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|Q-H\|^2 = \min_{H\in\mathbb{R}_1[X]} \|Q-H\|^2.$$

   car quand a et b décrivent $\mathbb{R}^2$, H décrit $\mathbb{R}_1[X]$ tandis que Q est fixe. Or d'après le cours, on a $\min_{H\in\mathbb{R}_1[X]} \|Q-H\|^2$ correspond à la distance du vecteur Q au sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_1[X]$ de l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$. Conclusion,

$$\boxed{\text{ce minimum existe et est atteint en un unique polynôme } H_0 \in \mathbb{R}_1[X].}$$

   De plus,

$$\boxed{\text{le polynôme } H_0 \text{ est le projeté orthogonal de } Q \text{ sur } \mathbb{R}_1[X].}$$

Dans la suite du sujet, on pose $\overline{Y} = \sum_{p=0}^{3} y_p$ et $\overline{XY} = \sum_{k=0}^{3} p y_p$.

9. (a) * On pose $H_0 = \varphi(Q, E_1) E_1 + \varphi(Q, E_2) E_2$. Montrons que H_0 est le projeté orthogonal de Q sur $\mathbb{R}_1[X]$, autrement dit que $H_0 \in \mathbb{R}_1[X]$ et que $\overrightarrow{H_0Q}$ est normal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}_1[X]$. On rappelle que $E_1 = \frac{1}{2}$ et $E_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{2}\right)$ et que (E_1, E_2) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$. Par combinaison linéaire, on a bien $H_0 \in \mathbb{R}_1[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Notons $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées de P dans la base (E_1, E_2) :

$$P = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2.$$

Calculons. Le vecteur $\overrightarrow{H_0Q}$ est donné par $Q - H_0$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(Q - H_0, P) &= \varphi(Q, P) - \varphi(H_0, P) \qquad \text{par linéarité à gauche du produit scalaire} \\
&= \varphi(Q, \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) - \varphi(\varphi(Q, E_1) E_1 + \varphi(Q, E_2) E_2, \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) \\
&= \lambda_1 \varphi(Q, E_1) + \lambda_2 \varphi(Q, E_2) - \varphi(Q, E_1)\varphi(E_1, \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) \\
&\qquad - \varphi(Q, E_2)\varphi(E_2, \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2) \\
&= \lambda_1 \varphi(Q, E_1) + \lambda_2 \varphi(Q, E_2) - \lambda_1 \varphi(Q, E_1) - \lambda_2 \varphi(Q, E_2) \\
&\qquad \text{car } (E_1, E_2) \text{ est orthonormée} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour $P \in \mathbb{R}_1[X]$ quelconque, on conclut que

$$\boxed{H_0 = \varphi(Q, E_1) E_1 + \varphi(Q, E_2) E_2 \text{ est le projeté orthogonal de } Q \text{ sur } \mathbb{R}_1[X].}$$

(b) Déterminons H_0 en fonction de $\overline{Y}$ et $\overline{XY}$. On a

$$\begin{aligned}
H_0 &= \varphi(Q, E_1) E_1 + \varphi(Q, E_2) E_2 \\
&= \varphi\left(Q, \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \varphi\left(Q, \frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{2}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\left(X - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\varphi(Q, 1) + \frac{1}{5}\left(\varphi(Q, X) - \frac{3}{2}\varphi(Q, 1)\right)\left(X - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{3} Q(p) + \frac{1}{5}\left(\sum_{p=0}^{3} Q(p)p - \frac{3}{2}\sum_{p=0}^{3} Q(p)\right)\left(X - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{3} y_p + \frac{1}{5}\left(\sum_{p=0}^{3} p y_p - \frac{3}{2}\sum_{p=0}^{3} y_p\right)\left(X - \frac{3}{2}\right) \qquad \text{par la question 1.c} \\
&= \frac{1}{4}\overline{Y} + \frac{1}{5}\left(\overline{XY} - \frac{3}{2}\overline{Y}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{4}\overline{Y} + \frac{1}{5}\left(\overline{XY} - \frac{3}{2}\overline{Y}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right).}$$

10. (a) * Justifions que le système $\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial \delta}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution que l'on déterminera en fonction de $\overline{Y}$ et $\overline{XY}$.

On a par la question 5. $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta}{\partial a}(a,b) &= \sum_{p=0}^{3} 2(-p)(y_p - ap - b) \\
&= 2\sum_{p=0}^{3} p(ap + b - y_p) \\
&= 2a\frac{3\times 4\times 7}{6} + 2b\frac{3\times 4}{2} - 2\overline{XY} \\
&= 28a + 12b - 2\overline{XY}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta}{\partial b}(a,b) &= \sum_{p=0}^{3} 2(-1)(y_p - ap - b) \\
&= 2\sum_{p=0}^{3} (ap + b - y_p) \\
&= 2a\frac{3\times 4}{2} + 2\times 4\times b - 2\overline{Y} \\
&= 12a + 8b - 2\overline{Y}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial a}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial \delta}{\partial b}(a,b) = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 28a + 12b - 2\overline{XY} = 0 \\ 12a + 8b - 2\overline{Y} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 14a + 6b - \overline{XY} = 0 \\ 6a + 4b - \overline{Y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 28a + 12b - 2\overline{XY} = 0 \\ 18a + 12b - 3\overline{Y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 10a - 2\overline{XY} + 3\overline{Y} = 0 \\ 18a + 12b - 3\overline{Y} = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{2\overline{XY} - 3\overline{Y}}{10} \\ b &= \frac{3\overline{Y} - 18a}{12} \\ &= \frac{3\overline{Y} - \frac{9}{5}\left(2\overline{XY} - 3\overline{Y}\right)}{12} \\ &= \frac{\overline{Y} - \frac{3}{5}\left(2\overline{XY} - 3\overline{Y}\right)}{4} \\ &= \frac{5\overline{Y} - 6\overline{XY} + 9\overline{Y}}{20} \\ &= \frac{14\overline{Y} - 6\overline{XY}}{20} \\ &= \frac{7\overline{Y} - 3\overline{XY}}{10}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, le système admet bien une unique solution donnée par

$$\boxed{\begin{cases} a &= \frac{2\overline{XY} - 3\overline{Y}}{10} \\ b &= \frac{7\overline{Y} - 3\overline{XY}}{10}. \end{cases}}$$

(b) * Vérifions que les valeurs de a et b trouvées à la question précédente correspondent au minimum H_0 de δ. Par la question 7. $\delta(a,b) = \|Q - H\|^2$ avec $H = aX + b$. Donc pour les valeurs de a et b trouvées à la question précédente, on a

$$H = \frac{2\overline{XY} - 3\overline{Y}}{10}X + \frac{7\overline{Y} - 3\overline{XY}}{10}.$$

Or, par la question 9.b

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{4}\overline{Y} + \frac{1}{5}\left(\overline{XY} - \frac{3}{2}\overline{Y}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\overline{XY} - \frac{3}{2}\overline{Y}\right)X + \frac{1}{4}\overline{Y} - \frac{3}{10}\left(\overline{XY} - \frac{3}{2}\overline{Y}\right) \\ &= \frac{2\overline{XY} - 3\overline{Y}}{10}X + \frac{5\overline{Y} - 6\overline{XY} + 9\overline{Y}}{20} \\ &= \frac{2\overline{XY} - 3\overline{Y}}{10}X + \frac{7\overline{Y} - 3\overline{XY}}{10}. \end{aligned}$$

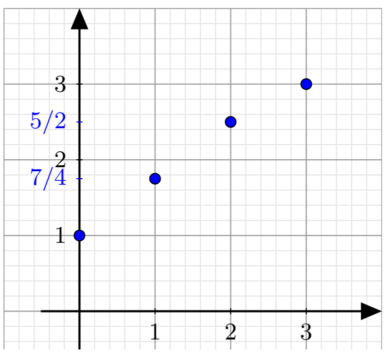
On retrouve bien la valeur de H avec les valeurs de a et b de la question précédente. Conclusion,

$$\boxed{\text{les valeurs de } a \text{ et } b \text{ trouvées à la question précédente correspondent au minimum } H_0 \text{ de } \delta.}$$

Une application industrielle : Un processus industriel nécessite que l'on contrôle au cours du temps t, exprimé en heures, l'évolution de la concentration C d'un produit dans une cuve car le processus doit être interrompu lorsque la concentration du produit devient inférieure à $\frac{1}{12}$.
Des études montrent que cette concentration C évolue au court du temps en suivant une loi de la forme $C(t) = \frac{k}{t+c}$, les valeurs des réels k et c étant inconnues.
On souhaite obtenir expérimentalement des valeurs de k et c.
Pour cela, on effectue des mesures qui ont donné les résultats suivants :

t	0	1	2	3
$C(t)$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

11. (a) Plaçons dans un repère orthogonal les points $M(t)$ de coordonnées $\left(t, \dfrac{1}{C(t)}\right)$ pour $t = 0$, 1, 2 et 3 :



(b) Expliquons comment ces quatre points devraient-ils être positionnés, si c'est le cas, et comment on peut l'expliquer.

Théoriquement, pour tout t, on a

$$\frac{1}{C(t)} = \frac{t+c}{k} = \frac{1}{k}t + \frac{c}{k}.$$

Donc la courbe représentative de $\frac{1}{C}$ devrait être une droite, ce qui n'est pas le cas ici car les points $\left(0, \frac{1}{C(0)}\right) = (0,1)$ et $(3,3)$ sont sur la droite $y = \frac{2}{3}x + 1$ ce qui n'est pas le cas par exemple de $\left(1, \frac{1}{C(1)}\right) = \left(1, \frac{7}{4}\right) \neq \left(1, \frac{5}{3}\right)$. On l'explique par le fait que ces mesures expérimentales sont approximatives (ce qui n'a rien de scientifique si l'on ne précise pas l'erreur associée...)

(c) Expliquons en quoi les questions 6 à 8 permettent en théorie de déterminer les valeurs de k et c. Pfff c'est quoi ces questions qui n'ont rien à voir avec des maths ? La méthode présentée entre les questions 6 à 8 dite *des moindres carrées* permet d'approcher un nuage de points par une droite en trouvant les valeurs des paramètres a et b de la droite pour minimiser la distance des points à la droite. On obtient alors « la meilleure droite approchant ce nuage de points ». Contrairement à ce que laisse entendre l'énoncé, cela ne donne pas les valeurs exactes de k et c mais une approximation optimale selon nos données. De plus, approcher $t \mapsto \frac{1}{C(t)}$ plutôt que $t \mapsto C(t)$ induit une erreur dont on ne tient pas compte ici.

(d) Déterminons les valeurs « expérimentales » que l'on obtient alors pour k et c. On a

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{7}{4}, \quad y_2 = \frac{5}{2}, \quad y_3 = 3.$$

Puis,

$$\overline{Y} = \sum_{p=0}^{3} y_p = 1 + \frac{7}{4} + \frac{5}{2} + 3 = \frac{4+7+10+12}{4} = \frac{33}{4}.$$

Aussi,

$$\overline{XY} = \sum_{p=0}^{3} p y_p = 0 + \frac{7}{4} + 2 \times \frac{5}{2} + 3 \times 3 = \frac{7+20+36}{4} = \frac{63}{4}.$$

Dès lors,

$$\begin{cases} a & = \frac{2\overline{XY} - 3\overline{Y}}{10} = \frac{2\times\frac{63}{4} - 3\times\frac{33}{4}}{10} = \frac{126-99}{40} = \frac{27}{40} \\ b & = \frac{7\times\frac{33}{4} - 3\times\frac{63}{4}}{10} = \frac{231-189}{40} = \frac{21}{20}. \end{cases}$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec ces valeurs on aurait

$$\frac{1}{C(t)} = \frac{1}{k}t + \frac{c}{k} = at + b.$$

Pour $t = 0$, $b = \frac{c}{k}$ et pour $t = 1$, $\frac{1}{k} + \frac{c}{k} = a + b = a + \frac{c}{k}$ donc $a = \frac{1}{k}$. Donc

$$k = \frac{1}{a} = \frac{40}{27} \quad \text{et} \quad c = bk = \frac{21}{20}\frac{40}{27} = \frac{42}{27}.$$

Conclusion,

$$\boxed{k = \frac{40}{27} \quad \text{et} \quad c = \frac{42}{27}.}$$

(e) Déterminons au bout de combien de temps, l'industriel doit interrompre le processus. On arrondira le résultat à l'entier le plus proche. L'interruption doit intervenir lorsque

$$C(t) \leqslant \frac{1}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{t+c} \leqslant \frac{1}{12} \quad \Leftrightarrow \quad t + c \geqslant 12k \quad \Leftrightarrow \quad t \geqslant 12k - c.$$

Par les valeurs obtenues à la question précédente,

$$t \geqslant 12 \times \frac{40}{27} - \frac{42}{27} = \frac{2\,(240-21)}{27} = \frac{2 \times 219}{27} = \frac{438}{27} = 16 + \frac{6}{27}.$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, on conclut que l'industriel doit interrompre le processus à

$$\boxed{t_0 = 16.}$$