

Devoir de Révision PTSI d'après Banque PT - Maths B - 2024

Les parties en *bleu avec astérisque* ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Premier exercice

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface S de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = u + 3v \\ y = uv \\ z = \sin(\pi u) + \cos(\pi v) \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u, v)$ le point de S de paramètres u et v .

1. Démontrer que $M(-1, 1)$ est l'unique point de S de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. * Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en $M(-1, 1)$ i.e. le plan passant par M et de vecteurs directeurs $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}(-1, 1) = \frac{\partial x}{\partial u}(-1, 1)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(-1, 1)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(-1, 1)\vec{k}$ et $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}(-1, 1) = \frac{\partial x}{\partial v}(-1, 1)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(-1, 1)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(-1, 1)\vec{k}$.

Deuxième exercice

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les fonctions

- r_0 définie sur $I_0 = [0; 2\pi]$ par $\forall t \in I_0, r_0(t) = R$ où $R > 0$;
- r_1 définie sur $I_1 = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par $\forall t \in I_1, r_1(t) = \cos(t)$;
- r_2 définie sur $I_2 = \mathbb{R}$ par $\forall t \in I_2, r_2(t) = e^t$;
- r_3 définie sur $I_3 =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $\forall t \in I_3, r_3(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$.

Enfin r_4 désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I_4 =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout $n \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$, on note

- Λ_n la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x_n(t) = r_n(t) \cos(t) \\ y_n(t) = r_n(t) \sin(t) \end{cases}, t \in I_n$;
- $M_n(t)$ le point de Λ_n de paramètre t pour $t \in I_n$.

* On admet que la tangente à Λ_n au point $M_n(t)$ est la droite passant par $M_n(t)$ et de vecteur directeur $\frac{d\overrightarrow{OM_n}}{dt}(t)$ lorsque celui-ci est non nul.

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1. Quelle est la nature de Λ_0 ? Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Démontrer que Λ_1 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Partie B

* On pose pour tout $t \in I_2$, $s_2(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}(t) \right\|$. La longueur de Λ_2 entre les points $M_2(t_1)$ et $M_2(t_2)$ est donnée par $\int_{t_1}^{t_2} s_2(t) dt$.

1. Calculer la longueur de Λ_2 entre les points $M_2(-\ln(3))$ et $M_2(3\ln(2))$.
2. La courbe Λ_2 est-elle de longueur finie?
3. Démontrer que tous les points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale sont alignés. On précisera un point et un vecteur directeur de la droite qui les contient.
4. * Déterminer $\vec{T}(t)$ un vecteur directeur de la tangente à Λ_2 au point $M_2(t)$ et $\vec{N}(t)$ un second vecteur pour que $(\vec{T}, \vec{N})$ soit une base orthonormée directe du plan.
5. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_2$ la courbe décrite par le point $I(t) = M_2(t) + s_2(t)\vec{N}(t)$ lorsque t varie dans I_2 .
6. Démontrer que $\mathcal{C}_2$ est l'image de Λ_2 par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

On pourra s'intéresser aux affices complexes des différents points considérés.

Partie C

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ_3 à $I'_3 = [0; \frac{\pi}{2}[$.
Préciser comment obtenir la courbe Λ_3 en entier.
2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x_3 et y_3 sur I'_3 . Préciser les valeurs et/ou les limites au bord.

3. * Calculer $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{y'_3(t)}{x'_3(t)}$.

On admet alors que la tangente à Λ_3 au point $M_3(0)$ a pour coefficient directeur ℓ .

4. Donner les coordonnées du point $M_3(\frac{\pi}{4})$ ainsi que celles d'un vecteur directeur de la tangente à Λ_3 en ce point.
5. A l'aide des limites de x_3 et y_3 , étudier la branche infinie lorsque t tend vers $\frac{\pi}{2}$ (asymptote et position par rapport à l'asymptote).
6. Tracer la courbe Λ_3 ~~sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet~~. On fera apparaître les éléments déterminés dans les questions précédentes.

Unité : 8 cm.

Partie D

On considère les 2 fonctions h et k définies sur I_4 par $\forall t \in I_4$,

$$\begin{aligned} h(t) &= t^2 (1 + \tan^2(t)) \\ k(t) &= \tan(t) + t (1 + \tan^2(t)). \end{aligned}$$

Ainsi que la famille de droites $(D_t)_{t \in I_4}$ d'équation cartésienne :

$$k(t)x - y = h(t).$$

1. Démontrer que $\forall t \in I_4$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2t (1 + \tan^2(t)) (1 + t \tan(t)) \\ k'(t) &= 2 (1 + \tan^2(t)) (1 + t \tan(t)). \end{aligned}$$

2. Soit $t \in I_4$. Déterminer l'intersection de la droite D_t avec l'axe des ordonnées ainsi qu'un vecteur directeur de la droite D_t puis en déduire une représentation paramétrique de la droite D_t .
3. * On souhaite déterminer une représentation paramétrique de l'enveloppe $\mathcal{C}_4$ de la famille de droites $(D_t)_{t \in I_4}$, autrement dit, on cherche une courbe $\mathcal{C}_4$, passant par toutes les droites D_t telles que au point $M(t) \in D_t$, la tangente en $M(t)$ soit exactement D_t . Soit λ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in I_4$, on pose $M(t)$ le point de coordonnées $(\lambda(t), k(t)\lambda(t) - h(t))$. Vérifier que $M(t) \in D_t$ et déterminer une fonction λ pour que $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ soit colinéaire à $\vec{u}(t)$, un vecteur directeur de D_t . On note alors $\mathcal{C}_4$ l'ensemble des points $M(t)$ obtenus. Donner des équations paramétriques de $\mathcal{C}_4$.
4. Existe-t-il une fonction r_4 telle que $\mathcal{C}_4 = \Lambda_4$?

Troisième exercice

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(\mathcal{E}_1) : \quad M^2 - 2M = A, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre les trois équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_1) : x^2 - 2x = 0 \quad (E_2) : x^2 - 2x = -1 \quad (E_3) : x^2 - 2x = 3.$$

2. * On considère P_A le polynôme défini par $P_A(X) = \det(XI_3 - A)$.

- (a) * Déterminer $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des racines de P_A .
- (b) * Calculer pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$ le noyau $\text{Ker}(A - \lambda I_3)$.
- (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
On classera les coefficients de la diagonale de D par ordre croissant.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 2.

- (a) Démontrer que $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$.

On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

- (b) Démontrer que $MA = AM$.
 - (c) * Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \in \text{Ker}(A - \lambda I_3)$, $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Démontrer que le vecteur $Y = MX$ appartient à $\text{Ker}(A - \lambda I_3)$ et en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X \in \text{Ker}(M - \mu I_3)$.
 - (d) En déduire que Δ est diagonale.
4. (a) Déterminer toutes les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$.
 - (b) En déduire toutes les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$. On exprimera ces matrices M à l'aide de P et de matrices diagonales à préciser.

Partie B

Cette partie s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2) : M^2 - 2M = \alpha I$ où $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M .
2. Soient M une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ * un complexe tel que $\text{Ker}(M - \lambda I) \neq \{0_{\mathbb{C}^2}\}$.
Etablir que $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
 - (a) * Soient $\alpha = -1$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - i. On suppose que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et que $M \neq I$. On note f l'application de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associée à M . Justifier qu'il existe e_2 un vecteur de $\mathbb{C}^2$ tel que $e_2 \notin \text{Ker}(M - I)$. On pose alors $e_1 = (M - I)e_2$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$ et montrer que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$.
 - ii. Montrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si M est semblable à T ou I .
 - (b) Soit $\alpha \neq -1$. * Préciser les matrices diagonales D solutions de $(\mathcal{E}_2)$ possibles (à l'aide de λ_1 et λ_2).
 - (c) Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$.
 - (d) Pour $\alpha = 0$, donner une matrice M non diagonale solution de $(\mathcal{E}_2)$. On explicitera ses 4 coefficients.
 - (e) Pour $\alpha = 0$, donner une matrice M non diagonale solution de $(\mathcal{E}_2)$. On explicitera ses 4 coefficients.

Fin de l'épreuve