Corrigé - Banque PT - Maths B - 2024
Version pour juniors

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Premier exercice

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère la surface S de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = u + 3v \\ y = uv \\ z = \sin(\pi u) + \cos(\pi v) \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u, v)$ le point de S de paramètres u et v.

1. Démontrons que $M(-1, 1)$ est l'unique point de S de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Soit $M(u, v)$ un point de S. Ce point est de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x = u + 3v = 2 \\ y = uv = -1 \\ z = \sin(\pi u) + \cos(\pi v) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - 3v \\ (2 - 3v)\, v = -1 \\ \sin(\pi u) + \cos(\pi v) = -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - 3v \\ 3v^2 - 2v - 1 = 0 \\ \sin(\pi u) + \cos(\pi v) = -1 \end{cases}$$

   Soit Δ le discriminant de $3v^2 - 2v - 1$, $\Delta = 4 + 12 = 16$ donc les racines associées sont $\frac{2+4}{6} = 1$ et $\frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$. Ainsi,

$$\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 - 3 = -1 \\ v = 1 \\ \sin(\pi u) + \cos(\pi v) = \sin(-\pi) + \cos(\pi) = 0 - 1 = -1 \text{ OK !} \end{cases} \\ \quad \text{OU} \\ \begin{cases} u = 2 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \\ v = -\frac{1}{3} \\ \sin(\pi u) + \cos(\pi v) = \sin(3\pi) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 + \frac{1}{2} = -1 \text{ impossible} \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1. \end{cases}$$

   Conclusion,

$$\boxed{M(-1, 1) \text{ est l'unique point de } S \text{ de coordonnées } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

2. * Déterminons une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ le plan tangent à S en $M(-1,1)$ i.e. le plan passant par M et de vecteurs directeurs $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(-1,1) = \frac{\partial x}{\partial u}(-1,1)\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(-1,1)\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(-1,1)\,\overrightarrow{k}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(-1,1) = \frac{\partial x}{\partial v}(-1,1)\,\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(-1,1)\,\overrightarrow{j}\,\frac{\partial z}{\partial v}(-1,1)\,\overrightarrow{k}$.
   On a
$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u,v) &= \overrightarrow{i} + v\,\overrightarrow{j} + \pi\cos(\pi u)\,\overrightarrow{k}\\ \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u,v) &= 3\,\overrightarrow{i} + u\,\overrightarrow{j} - \pi\sin(\pi v)\,\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$
   Donc
$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(-1,1) &= \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \pi\cos(-\pi)\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \pi\,\overrightarrow{k}\\ \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(-1,1) &= 3\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \pi\sin(\pi)\,\overrightarrow{k} = 3\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}.\end{aligned}$$
   Puisque ces deux vecteurs sont directeurs de $\mathcal{T}$, on a
$$\overrightarrow{n_1} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(-1,1) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(-1,1)\text{ directeur de }\mathcal{T}.$$
   Or
$$\begin{bmatrix}1\\1\\-\pi\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\pi\\-3\pi\\-4\end{bmatrix}$$
   Donc $\overrightarrow{n}\begin{bmatrix}\pi\\3\pi\\4\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}$. Soit $N(x,y,z)$ un point de l'espace. On a
$$\begin{aligned}N \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{n}\\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix}x-2\\y+1\\z+1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\pi\\3\pi\\4\end{bmatrix} \right\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \pi x + 3\pi y + 4z - 2\pi + 3\pi + 4 = 0.\end{aligned}$$
   Conclusion, une équation cartésienne du plan tangent est donnée par
$$\boxed{\mathcal{T} : \qquad \pi x + 3\pi y + 4z + \pi + 4 = 0.}$$

Deuxième exercice

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On considère les fonctions

- r_0 définie sur $I_0 = [0; 2\pi]$ par $\forall t \in I_0$, $r_0(t) = R$ où $R > 0$;
- r_1 définie sur $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $\forall t \in I_1$, $r_1(t) = \cos(t)$;
- r_2 définie sur $I_2 = \mathbb{R}$ par $\forall t \in I_2$, $r_2(t) = \mathrm{e}^t$;
- r_3 définie sur $I_3 = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $\forall t \in I_3$, $r_3(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$.

Enfin r_4 désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I_4 = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Pour tout $n \in [\![0; 4]\!]$, on note

- Λ_n la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x_n(t) = r_n(t)\cos(t) \\ y_n(t) = r_n(t)\sin(t) \end{cases}$, $t \in I_n$;
- $M_n(t)$ le point de Λ_n de paramètre t pour $t \in I_n$.

* On admet que la tangente à Λ_n au point $M_n(t)$ est la droite passant par $M_n(t)$ et de vecteur directeur $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_n}}{\mathrm{d}t}(t)$ lorsque celui-ci est non nul.

Les différentes parties de cet exercice sont indépendants.

Partie A

1. Déterminons la nature de Λ_0 et précisons ses éléments caractéristiques. Pour tout $t \in I_0 = [0; 2\pi]$,
$$\begin{cases} x_0(t) = r_0(t)\cos(t) = R\cos(t) \\ y_0(t) = r_0(t)\sin(t) = R\sin(t). \end{cases}$$
On reconnaît les équations paramétriques d'un cercle :
$$\boxed{\Lambda_0 \text{ est un cercle de centre } O \text{ et de rayon } R.}$$

2. Démontrons que Λ_1 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Pour tout $t \in I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,
$$\begin{cases} x_1(t) = r_1(t)\cos(t) = \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2} \\ y_1(t) = r_1(t)\sin(t) = \cos(t)\sin(t) = \frac{\sin(2t)}{2}. \end{cases}$$
On peut alors remarquer que
$$\left(x_1(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + y_1(t)^2 = \frac{\cos^2(2t)}{4} + \frac{\sin^2(2t)}{4} = \frac{1}{4}.$$
De plus, lorsque t décrit I_1, alors $s = 2t$ décrit $[-\pi; \pi]$. Conclusion,
$$\boxed{\Lambda_1 \text{ est un cercle de centre } \Omega\,(1/2, 0) \text{ et de rayon } 1/2.}$$

Partie B

* On pose pour tout $t \in I_2$, $s_2(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|$. La *longueur* de Λ_2 entre les points $M_2(t_1)$ et $M_2(t_2)$ est donnée par $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} s_2(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculons la longueur de Λ_2 entre les points $M_2(-\ln(3))$ et $M_2(3\ln(2))$. On a pour tout $t \in I_2 = \mathbb{R}$,
$$\overrightarrow{OM_2}(t) = x_2(t)\,\overrightarrow{i} + y_2(t)\,\overrightarrow{j} = r_2(t)\cos(t)\,\overrightarrow{i} + r_2(t)\sin(t)\,\overrightarrow{j} = \mathrm{e}^t\cos(t)\,\overrightarrow{i} + \mathrm{e}^t\sin(t)\,\overrightarrow{j}.$$
Ainsi,
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\mathrm{e}^t\cos(t) - \mathrm{e}^t\sin(t)\right)\overrightarrow{i} + \left(\mathrm{e}^t\sin(t) + \mathrm{e}^t\cos(t)\right)\overrightarrow{j}.$$
Donc
$$\begin{aligned} s_2(t) &= \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}(t)\right\| \\ &= \sqrt{(\mathrm{e}^t\cos(t) - \mathrm{e}^t\sin(t))^2 + (\mathrm{e}^t\sin(t) + \mathrm{e}^t\cos(t))^2} \\ &= \mathrm{e}^t\sqrt{\cos^2(t) - 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + \cos^2(t)} \\ &= \mathrm{e}^t\sqrt{2}\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

La longueur recherchée est alors donnée par

$$\begin{aligned}\ell_0 &= \int_{-\ln(3)}^{3\ln(2)} \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t\right]_{t=-\ln(3)}^{t=3\ln(2)}\\ &= \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{3\ln(2)} - \mathrm{e}^{-\ln(3)}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(8-\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{23\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Conclusion, la longueur de Λ_2 entre $M_2(-\ln(3))$ et $M_2(3\ln(2))$ est donnée par :

$$\boxed{\ell_0 = \frac{23\sqrt{2}}{3}.}$$

2. Déterminons si la courbe Λ_2 est-elle de longueur finie. Puisque Λ_2 n'est pas périodique et que $I_2 = \mathbb{R}$, on obtient que la longueur totale de la courbe est donnée par

$$\ell = \lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to+\infty}\int_A^B s_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_A^B s_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_A^B \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^B - \mathrm{e}^A\right).$$

Donc

$$\ell = \lim_{B\to+\infty}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^B = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe } \Lambda_2 \text{ est de longueur infinie.}}$$

3. Démontrons que tous les points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale sont alignés. On précisera un point et un vecteur directeur de la droite qui les contient. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale. Pour $t \in I_2 = \mathbb{R}$, on a vu que

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\mathrm{e}^t\cos(t) - \mathrm{e}^t\sin(t)\right)\vec{i} + \left(\mathrm{e}^t\sin(t) + \mathrm{e}^t\cos(t)\right)\vec{j}.$$

Donc

$$\begin{aligned}M_2(t)\in\mathcal{E} \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}(t) \text{ est vertical}\\ &\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\mathrm{e}^t\cos(t) - \mathrm{e}^t\sin(t) = 0\\ \mathrm{e}^t\sin(t) + \mathrm{e}^t\cos(t) \neq 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\cos(t) = \sin(t)\\ \cos(t) \neq -\sin(t)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\quad t \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]\\ &\Rightarrow\quad \exists k\in\mathbb{Z},\ \begin{cases}x_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+k\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+k\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\\ &\Rightarrow\quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x_2(t) = \lambda\\ y_2(t) = \lambda\end{cases}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{E} \subset \{ M(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Conclusion, tous les points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale sont alignés car

$$\boxed{\text{appartiennent à la même droite } \mathcal{D} \text{ passant par } O \text{ et de vecteur directeur } \vec{i} + \vec{j}.}$$

4. * Déterminons $\vec{T}(t)$ un vecteur directeur de la tangente à Λ_2 au point $M_2(t)$ et $\vec{N}(t)$ un second vecteur pour que $\left(\vec{T}, \vec{N}\right)$ soit une base orthonormée directe du plan. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a vu que

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\mathrm{e}^t \cos(t) - \mathrm{e}^t \sin(t)\right) \vec{i} + \left(\mathrm{e}^t \sin(t) + \mathrm{e}^t \cos(t)\right) \vec{j}.$$

et que ce vecteur ne peut jamais être nul d'après la question précédente. De plus,

$$s_2(t) = \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t.$$

Donc on pose

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{s_2(t)} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(t) - \sin(t))\, \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t))\, \vec{j}.$$

Puis on pose

$$\vec{N}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t))\, \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(t) - \sin(t))\, \vec{j}.$$

Alors, on a bien

$$\left\| \vec{T}(t) \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} = 1.$$

De même $\left\| \vec{N}(t) \right\| = 1$. Puis,

$$\left\langle \vec{T}(t), \vec{N}(t) \right\rangle = \frac{1}{2} \left(-(\cos(t) - \sin(t))(\cos(t) + \sin(t)) + (\cos(t) + \sin(t))(\cos(t) - \sin(t)) \right) = 0.$$

Donc $\left(\vec{T}(t), \vec{N}(t)\right)$ est une famille orthonormale et donc libre et de cardinal 2 donc une base orthonormée du plan. Enfin,

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{T}(t), \vec{N}(t)\right) &= \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(t) - \sin(t)) & -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t)) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t)) & \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(t) - \sin(t)) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos(t) - \sin(t) & -(\sin(t) + \cos(t)) \\ \sin(t) + \cos(t) & \cos(t) - \sin(t) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2 \\
&= 1 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc la base est directe. Conclusion, pour

$$\boxed{\begin{cases} \vec{T}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(t) - \sin(t))\, \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t))\, \vec{j} \\ \vec{N}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t))\, \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(t) - \sin(t))\, \vec{j} \end{cases},}$$

alors la famille

$$\boxed{\left(\vec{T}(t), \vec{N}(t)\right) \text{ forme une base orthonormée directe du plan.}}$$

5. Déterminons une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_2$ la courbe décrite par le point $I(t) = M_2(t) + s_2(t)\overrightarrow{N}(t)$ lorsque t varie dans I_2. Pour tout $t \in I_2 = \mathbb{R}$, notons $(x_I(t), y_I(t))$ les coordonnées du point $I(t)$. On a

$$\begin{aligned} x_I(t) &= \mathrm{e}^t \cos(t) + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(t)+\cos(t))\right) \\ &= \mathrm{e}^t\cos(t) - \mathrm{e}^t(\sin(t)+\cos(t)) \\ &= -\mathrm{e}^t \sin(t). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} y_I(t) &= \mathrm{e}^t \sin(t) + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(t)-\sin(t))\right) \\ &= \mathrm{e}^t\sin(t) + \mathrm{e}^t(\cos(t)-\sin(t)) \\ &= \mathrm{e}^t \cos(t). \end{aligned}$$

Conclusion, une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_2$ est donnée par

$$\boxed{\begin{cases} x = -\mathrm{e}^t \sin(t) \\ y = \mathrm{e}^t\cos(t). \end{cases}}$$

6. Démontrons que $\mathcal{C}_2$ est l'image de Λ_2 par une rotation dont on précisera le centre et l'angle. Par la question précédente, on observe que

$$\begin{cases} x_I(t) = -y_2(t) \\ y_I(t) = x_2(t). \end{cases}$$

Dès lors,

$$\boxed{\mathcal{C}_2 \text{ est l'image de } \Lambda_2 \text{ par la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

L'énoncé parlait d'affixe, pour ceux que cela intéresse : en notant $z_I(t)$ l'affixe de $I(t)$ et $z_2(t)$ celui de $M_2(t)$. On a pour tout $t \in I_2$,

$$z_2(t) = \mathrm{e}^t\cos(t) + i\,\mathrm{e}^t\sin(t) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{it} = \mathrm{e}^{(1+i)t}.$$

Et

$$z_I(t) = -\mathrm{e}^t\sin(t) + i\,\mathrm{e}^t\cos(t) = i\,\mathrm{e}^t(i\sin(t)+\cos(t)) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{t+it} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,z_2(t).$$

Ainsi, $z_I(t)$ s'obtient à partir de $z_2(t)$ par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O :

$$\boxed{\mathcal{C}_2 \textit{ est l'image de } \Lambda_2 \textit{ par la rotation de centre } O \textit{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

Partie C

1. Justifions que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ_3 à $I_3' = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

   Précisons comment obtenir la courbe Λ_3 en entier. Pour tout $t \in I_3 = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{cases} x_3(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\cos(t) = \sin^2(t) \\ y_3(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\sin(t) = \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)}. \end{cases}$$

   On note que I_3 est centré en 0 et de plus, pour tout $t \in I_3$,

$$\begin{cases} x_3(-t) = \sin^2(t) = x_3(t) \\ y_3(-t) = -\frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} = -y_3(t). \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\boxed{M_3(-t) \text{ est le symétrique de } M_3(t) \text{ par la symétrie d'axe } (Ox).}$$

Il est alors possible de restreindre l'étude de Λ_3 à

$$\boxed{I_3' = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[.}$$

et obtenir la totalité de la courbe par la symétrie axiale d'axe (Ox).

2. Déterminons les tableaux de variations des fonctions x_3 et y_3 sur I_3'. Précisons les valeurs et/ou les limites au bord.

   Pour tout $t \in I_3'$, $x_3(t) = \sin^2(t)$. Donc x_3 est croissante sur I_3' comme composée de fonctions qui le sont sur I_3' et $\mathbb{R}_+$ respectivement et $x_3(0) = 0$, $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} x_3(t) = 1$. De plus, $t \mapsto \sin^3(t)$ est croissante sur I_3' et $t \mapsto \cos(t)$ est décroissante sur I_3' et à valeurs dans $]0;1]$. Donc par composée, $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ est croissante sur I_3'. Par produit, y_3 est croissante sur I_3'. Enfin,

$$y_3(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t \to \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} y_3(t) = \lim_{\substack{t \to \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

   Conclusion,

t	0	$\frac{\pi}{2}$
x_3	0 $\nearrow$	1
y_3	0 $\nearrow$	$+\infty$

3. * Calculons $\ell = \lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x > 0}} \frac{y_3'(t)}{x_3'(t)}$. On a pour tout $t \in I_3'$,

$$\begin{aligned}
x_3'(t) &= 2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t) \\
y_3'(t) &= \frac{3\cos^2(t)\sin^2(t) + \sin^4(t)}{\cos^2(t)} \\
&= \frac{\left(3\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)\sin^2(t)}{\cos^2(t)} \\
&= \frac{\left(2\cos^2(t) + 1\right)\sin^2(t)}{\cos^2(t)}.
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ x > 0}} \frac{\left(2\cos^2(t) + 1\right)\sin^2(t)}{\cos^2(t)} \frac{1}{2\cos(t)\sin(t)} \\
&= \lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ x > 0}} \frac{\left(2\cos^2(t) + 1\right)\sin(t)}{2\cos^3(t)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\ell = 0.}$$

* On admet alors que la tangente à Λ_3 au point $M_3(0)$ a pour coefficient directeur ℓ. Conclusion,

$$\boxed{\text{la tangente à } \Lambda_3 \text{ au point } M_3(0) \text{ est horizontale.}}$$

4. Donnons les coordonnées du point $M_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que celles d'un vecteur directeur de la tangente à Λ_3 en ce point. On a

$$\begin{cases} x_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ y_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(x_3\left(\frac{\pi}{4}\right), y_3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).}$$

De plus, par les calculs de la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_3}(t)}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= x_3'\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + y_3'\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \frac{\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \vec{i} + \frac{\left(2\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\vec{j} \\ &= \vec{i} + 2\vec{j} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

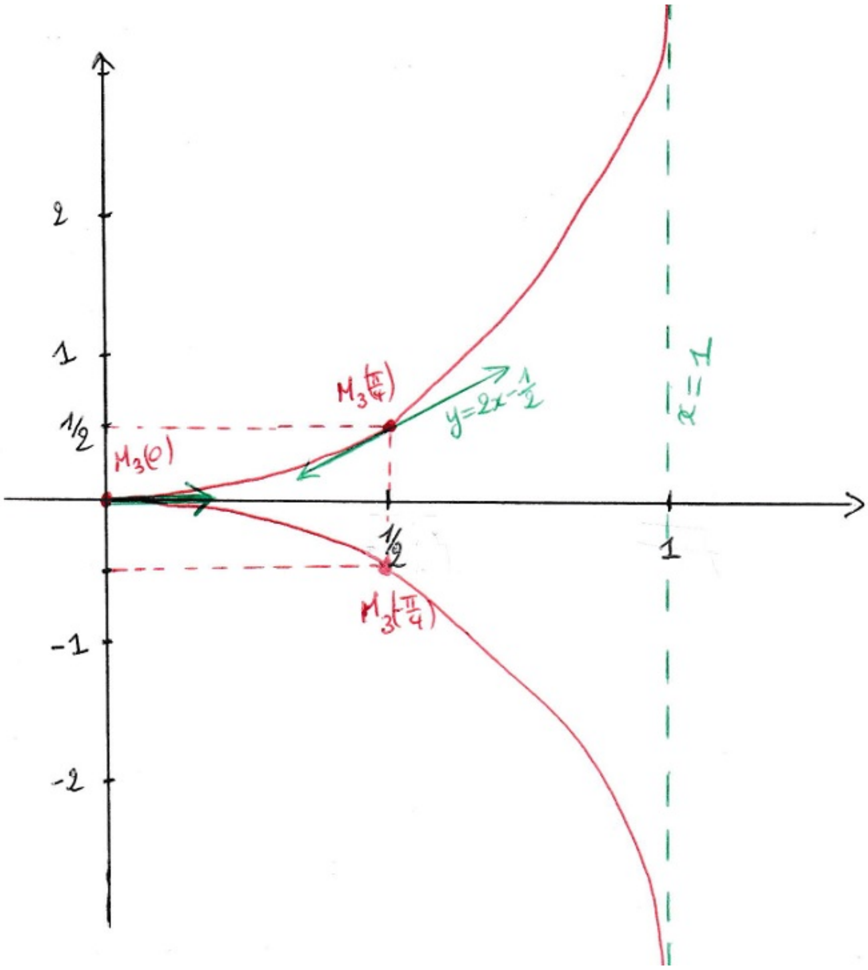
Conclusion, vecteur directeur de la tangente à Λ_3 au point $M_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est donné par

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_3}(t)}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vec{i} + 2\vec{j}.}$$

5. A l'aide des limites de x_3 et y_3, étudions la branche infinie lorsque t tend vers $\frac{\pi}{2}$ (asymptote et position par rapport à l'asymptote). De par la question 2. on a observe que lorsque t tend vers $\frac{\pi}{2}$, la courbe Λ_3 admet

$$\boxed{\text{une asymptote verticale d'équation } x = 1 \text{ et se situe à gauche de cette asymptote.}}$$

6. Traçons la courbe Λ_3 ~~sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet~~. On fera apparaître les éléments déterminés dans les questions précédentes :



Partie D

On considère les 2 fonctions h et k définies sur I_4 par $\forall t \in I_4$,

$$\begin{aligned} h(t) &= t^2\left(1+\tan^2(t)\right) \\ k(t) &= \tan(t) + t\left(1+\tan^2(t)\right). \end{aligned}$$

Ainsi que la famille de droites $(D_t)_{t\in I_4}$ d'équation cartésienne :

$$k(t)x - y = h(t).$$

1. Démontrons que $\forall t \in I_4$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2t\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t)) \\ k'(t) &= 2\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t)). \end{aligned}$$

La fonction tan est dérivable sur $I_4 = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ donc h et k sont dérivables sur I_4 et

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2t\left(1+\tan^2(t)\right) + t^2 2\left(1+\tan^2(t)\right)\tan(t) \\ &= 2t\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t)). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} k'(t) &= 1+\tan^2(t)+1+\tan^2(t)+t2\left(1+\tan^2(t)\right)\tan(t) \\ &= 2\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t)). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{aligned} h'(t) &= 2t\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t)) \\ k'(t) &= 2\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t)). \end{aligned}}$$

2. Soit $t \in I_4$. Déterminons l'intersection de la droite D_t avec l'axe des ordonnées ainsi qu'un vecteur directeur de la droite D_t puis déduisons-en une représentation paramétrique de la droite D_t. Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a

$$M \in D_t \cap (Oy) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} k(t)x - y = h(t) \\ x = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = -h(t) \\ x = 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{D_t \cap (Oy) = \{M(0, -h(t))\}.}$$

De plus, $k(t)\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à D_t donc $\overrightarrow{i} + k(t)\overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de D_t. Conclusion, une représentation paramétrique de la droite D_t est donnée par

$$\boxed{D_t : \begin{cases} x = s \\ y = -h(t) + k(t)s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.}$$

3. * On souhaite déterminer une représentation paramétrique de l'enveloppe $\mathcal{C}_4$ de la famille de droites $(D_t)_{t \in I_4}$, autrement dit, on cherche une courbe $\mathcal{C}_4$, passant par toutes les droites D_t telles que au point $M(t) \in D_t$, la tangente en $M(t)$ soit exactement D_t. Soit λ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in I_4$, on pose $M(t)$ le point de coordonnées $(\lambda(t), k(t)\,\lambda(t) - h(t))$. Vérifions que $M(t) \in D_t$ et déterminer une fonction λ pour que $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$ soit colinéaire à $\overrightarrow{u}(t)$, un vecteur directeur de D_t. On note alors $\mathcal{C}_4$ l'ensemble des points $M(t)$ obtenus. Donner des équations paramétriques de $\mathcal{C}_4$. Soit $t \in I_4$. On a

$$k(t)\,\lambda(t) - (k(t)\,\lambda(t) - h(t)) = h(t).$$

Donc

$$\boxed{M(t) \in D_t.}$$

De plus, dans ce cas, puisque λ est $\mathscr{C}^1$,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \lambda'(t)\overrightarrow{i} + \left(k'(t)\,\lambda(t) + k(t)\,\lambda'(t) - h'(t)\right)\overrightarrow{j}.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \text{ colinéaire à } \overrightarrow{u}(t) \quad&\Leftrightarrow\quad \det\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t), \overrightarrow{u}(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} \lambda'(t) & 1 \\ k'(t)\,\lambda(t) + k(t)\,\lambda'(t) - h'(t) & k(t) \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad \lambda'(t)k(t) - \left(k'(t)\,\lambda(t) + k(t)\,\lambda'(t) - h'(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad -k'(t)\,\lambda(t) + h'(t) = 0 \end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $t\tan(t) \geqslant 0$ et pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $t\tan(t) \geqslant 0$. Donc pour tout $t \in I_2$, $k'(t) = 2\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t)) > 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \text{ colinéaire à } \overrightarrow{u}(t) \quad\Leftrightarrow\quad \lambda(t) &= \frac{h'(t)}{k'(t)} \\ &= \frac{2t\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t))}{2\left(1+\tan^2(t)\right)(1+t\tan(t))} \\ &= t. \end{aligned}$$

Par suite, les coordonnées de $M(t)$ sont données par

$$\begin{cases} x(t) = \lambda(t) = t \\ y(t) = \left(\tan(t) + t\left(1+\tan^2(t)\right)\right)t - t^2\left(1+\tan^2(t)\right) = t\tan(t). \end{cases}$$

Conclusion, des équations paramétriques de $\mathcal{C}_4$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{C}_4 : \quad \begin{cases} x = t \\ y = t\tan(t) \end{cases}, \ t \in I_4.}$$

4. Déterminons s'il existe une fonction r_4 telle que $\mathcal{C}_4 = \Lambda_4$. Posons pour tout $t \in I_4$, $r_4(t) = \frac{t}{\cos(t)}$ qui est bien définie car $\cos(t) > 0$ sur I_4. Alors par la question précédente :

$$\mathcal{C}_4 : \quad \begin{cases} x(t) = t = \frac{t}{\cos(t)}\cos(t) = r_4(t)\cos(t) \\ y = t\tan(t) = r_4(t)\sin(t) \end{cases}, \ t \in I_4.$$

Ainsi, en posant

$$\boxed{\forall t \in I_4, \quad r_4(t) = \frac{t}{\cos(t)},}$$

alors

$$\boxed{\mathcal{C}_4 = \Lambda_4.}$$

Troisième exercice

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(\mathcal{E}_1) : \qquad M^2 - 2M = A, \qquad \text{où } \ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Résolvons les trois équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_1) : x^2 - 2x = 0 \quad (E_2) : x^2 - 2x = -1 \quad (E_3) : x^2 - 2x = 3.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(E_1) : x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = 2.$$

D'autre part,

$$(E_2) : x^2 - 2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Enfin,

$$(E_3) : x^2 - 2x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Posons Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4 + 12 = 16$. Ainsi, les racines sont $\frac{2+4}{2} = 3$ et $\frac{2-4}{2} = -1$. Conclusion, l'ensemble solution est donné respectivement par

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{0, 2\}, \qquad \mathscr{S}_2 = \{1\}, \qquad \mathscr{S}_3 = \{-1, 3\}.}$$

2. * On considère P_A le polynôme défini par $P_A(X) = \det(XI_3 - A)$.

   (a) * Déterminons $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des racines de P_A. On a

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \det(XI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -3 \\ -3 & X+3 & -3 \\ -4 & 4 & X-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X+1 & -X-1 & 0 \\ -3 & X+3 & -3 \\ -4 & 4 & X-3 \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&= \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 \\ -3 & X & -3 \\ -4 & 0 & X-3 \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\
&= (X+1) \begin{vmatrix} X & -3 \\ 0 & X-3 \end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } L_1 \\
&= (X+1)\,X\,(X-3).
\end{aligned}$$

   Conclusion, l'ensemble des racines de P_A est donné par

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 0; 3\}.}$$

   (b) * Calculons pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ le noyau $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$.

   - Pour $\lambda = -1$, on a

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

     On note que C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires. Donc $\mathrm{rg}(A + I_3) \geqslant 2$. De plus, $C_1 = C_3$ donc $\mathrm{rg}(A + I_3) \leqslant 2$ et donc $\mathrm{rg}(A + I_3) = 2$. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)) = 1$. Or $C_1 = C_3$ i.e. $C_1 - C_3 = 0$. Donc $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right).}$$

   - Pour $\lambda = 0$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

     De même, on note que $C_2 = -C_1$ i.e. $C_1 + C_2 = 0$ tandis que C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires. Donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).}$$

   - Pour $\lambda = 3$, on a

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

On note que C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires mais $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).}$$

(c) Déterminons une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ en classant les coefficients de la diagonale de D par ordre croissant.
Posons

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad e_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Posons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On a

$$\begin{aligned}
\det(\mathscr{B}) &= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{vmatrix} \qquad\qquad C_3 \leftarrow C_3 + C_1\\
&= \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } C_1\\
&= 2 - 1 = 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$:

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}^3$. Par la question précédente, $e_1 \in \operatorname{Ker}(A + I_3)$ donc $Ae_1 = -e_1$ ou encore $f(e_1) = -e_1$. De même, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = 3e_3$. Dès lors, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$\boxed{D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}.}$$

Par la formule de changement de base,

$$\boxed{A = PDP^{-1}.}$$

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 2.

(a) Démontrons que $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$. On a $M = P\Delta P^{-1}$ et $M^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
M^2 - 2M = A \quad &\Leftrightarrow \quad P\Delta^2P^{-1} - 2P\Delta P^{-1} = PDP^{-1}\\
&\Leftrightarrow \quad P\left(\Delta^2 - 2\Delta\right)P^{-1} = PDP^{-1}\\
&\Leftrightarrow \quad \Delta^2 - 2\Delta = D \qquad \text{CAR } P \text{ et } P^{-1} \text{ sont inversibles.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{M^2 - 2M = A \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta^2 - 2\Delta = D.}$$

On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

(b) Démontrons que $MA = AM$. On a

$$\begin{aligned} MA &= M\left(M^2 - 2M\right) \qquad \text{car } M \text{ est solution de } (\mathcal{E}_1) \\ &= M^3 - 2M^2 \\ &= \left(M^2 - 2M\right) M \\ &= AM. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{MA = AM.}$$

(c) * Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ et $X \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\, I_3)$, $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Démontrons que le vecteur $Y = MX$ appartient à $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda\, I_3)$ et déduisons-en qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X \in \mathrm{Ker}\,(M - \mu I_3)$. On a

$$\begin{aligned} AY &= AMX \\ &= MAX \qquad \text{par la question précédente} \\ &= M\,(\lambda\, X) \qquad \text{car } X \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\, I_3) \\ &= \lambda\, MX \qquad \text{car } \lambda \text{ est un scalaire} \\ &= \lambda\, Y. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{Y \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\, I_3)\,.}$$

Or par la question 2.b $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda\, I_3)$ est une droite vectorielle (et ce quelque soit la valeur de $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$). Comme X et Y appartiennent à cette même droite, alors X et Y sont colinéaires : ou $X = 0$ ou il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Y = \mu X$. Or $X \neq 0$. Donc $MX = Y = \mu X$. Conclusion,

$$\boxed{\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathrm{Ker}\,(M - \mu I_3)\,.}$$

(d) Déduisons-en que Δ est diagonale. Par la question précédente, pour e_1 définie à la question 2.c il existe μ_1 tel que $e_1 \in \mathrm{Ker}\,(M - \mu_1 I_3)$ donc $Me_1 = \mu e_1$. De même il existe μ_2 et μ_3 tels que $Me_2 = \mu_2 e_2$ et $Me_3 = \mu_3 e_3$. Donc la matrice de l'application canoniquement associée à M dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Or par la formule de changement de base, $\tilde{D} = P^{-1}MP = \Delta$ par définition de Δ. Conclusion,

$$\boxed{\text{la matrice } \Delta \text{ est diagonale.}}$$

4. (a) Déterminons toutes les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$. Posons $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$,

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\Delta^2 - 2\Delta = D \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - 2a = -1 & (E_2) \\ b^2 - 2b = 0 & (E_1) \\ c^2 - 2c = 3 & (E_3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \text{ OU } b = 2 \\ c = -1 \text{ OU } c = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ OU } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&\qquad \text{OU } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ OU } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\Delta^2 - 2\Delta = D \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}.}$$

(b) Déduisons-en toutes les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$ en exprimant ces matrices M à l'aide de P et de matrices diagonales à préciser. Par les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
M^2 - 2M = A \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta^2 - 2\Delta = D \\
&\Leftrightarrow \quad \Delta \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion, les matrices solutions sont

$$\boxed{P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}.}$$

Partie B

Cette partie s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2) : M^2 - 2M = \alpha I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Démontrons que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M. Soit N une matrice semblable à M : il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que $N = P^{-1}MP$. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_2) : M^2 - 2M = \alpha I \quad &\Leftrightarrow \quad \left(PNP^{-1}\right)^2 - 2PNP^{-1} = \alpha I \\
&\Leftrightarrow \quad PN^2P^{-1} - 2PNP^{-1} = \alpha PP^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad P\left(N^2 - 2N\right)P^{-1} = P(\alpha I)P^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad N^2 - 2N = \alpha I \qquad \text{car } P \text{ et } P^{-1} \text{ sont inversibles.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{toute matrice semblable à } M \text{ est solution de } (\mathcal{E}_2).}$$

2. Soient M une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ * un complexe tel que $\operatorname{Ker}(M-\lambda I) \neq \{0_{\mathbb{C}^2}\}$. Etablissons que $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$. Puisque $\operatorname{Ker}(M-\lambda I) \neq \{0_{\mathbb{C}^2}\}$, il existe $X \in \operatorname{Ker}(M-\lambda I)$, $X \neq 0_{\mathbb{C}^2}$. On a donc $MX = \lambda X$ puis $M^2X = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda^2 X$. Puisque M est solution de $(\mathcal{E}_2)$, $M^2 - 2M = \alpha I$ et donc

$$\left(M^2 - M\right)X = \alpha X \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 X - 2\lambda X = \alpha X \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda = \alpha \quad \textbf{car } X \neq 0_{\mathbb{C}^2}\textbf{.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\lambda^2 - 2\lambda = \alpha.}$$

3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.

(a) * Soient $\alpha = -1$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i. On suppose que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ et que $M \neq I$. On note f l'application de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associée à M. Justifions qu'il existe e_2 un vecteur de $\mathbb{C}^2$ tel que $e_2 \notin \operatorname{Ker}(M-I)$. On pose alors $e_1 = (M-I)e_2$. Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$ et montrons que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = T$.
Puisque $M \neq I$, alors $M - I \neq 0_2$. Donc $\operatorname{Ker}(M-I) \neq \mathbb{C}^2$. Donc

$$\boxed{\exists e_2 \in \mathbb{C}^2,\ e_2 \notin \operatorname{Ker}(M-I).}$$

Posons $e_1 = (M-I)e_2$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. Commençons par calculer $f(e_1)$ et $f(e_2)$. On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= Me_1 \\ &= M(M-I)e_2 \\ &= \left(M^2 - M\right)e_2 \\ &= (2M - I - M)e_2 \qquad \text{car } M \text{ solution de } (\mathcal{E}_2) \text{ et } \alpha = -1 \\ &= (M-I)e_2 \\ &= e_1. \end{aligned}$$

De plus, $e_1 = Me_2 - e_2$ donc $Me_2 = e_1 + e_2$. Ainsi,

$$f(e_2) = e_1 + e_2.$$

Montrons maintenant que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{C}^2$. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{C}^2}.$$

Alors, par linéarité de f,

$$f(ae_1 + be_2) = 0_{\mathbb{C}^2} \quad \Leftrightarrow \quad af(e_1) + bf(e_2) = 0_{\mathbb{C}^2} \quad \Leftrightarrow \quad ae_1 + b(e_1 + e_2) = 0_{\mathbb{C}^2}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{C}^2} \\ (a+b)e_1 + be_2 = 0_{\mathbb{C}^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{C}^2} \\ be_1 = 0_{\mathbb{C}^2} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1.$$

Or $e_2 \notin \operatorname{Ker}(M-I)$ donc $e_1 = (M-I)e_2 \neq 0_{\mathbb{C}^2}$. Donc

$$\begin{aligned} \begin{cases} ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{C}^2} \\ b = 0 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ae_1 = 0_{\mathbb{C}^2} \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre et de cardinal $2 = \dim\left(\mathbb{C}^2\right)$. Donc

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}^2.}$$

De plus, on a vu que $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = T.}$$

ii. Montrons que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si M est semblable à T. Supposons M solution de $(\mathcal{E}_2)$. Si $M = I$ alors M est semblable à I. Si $M \neq I$, par la question précédente, M est semblable à T. Réciproquement, supposons M semblable à T ou I. Donc il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que $M = PTP^{-1}$ ou $M = PIP^{-1} = I$. Or si $M = PTP^{-1}$ alors

$$\begin{aligned}
M^2 - 2M &= P\left(T^2 - 2T\right)P^{-1} \\
&= P\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P(-I)P^{-1} \\
&= -PP^{-1} = -I.
\end{aligned}$$

Donc M est solution de $(\mathcal{E}_2)$. Et si $M = I$,

$$M^2 - 2M = I - 2I = -I,$$

et M est aussi solution de $(\mathcal{E}_2)$. Conclusion, si $\alpha = -1$,

$$\boxed{M \text{ solution de } (\mathcal{E}_2) \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ semblable à } I \text{ ou } T.}$$

(b) Soit $\alpha \neq -1$. * Précisons les matrices diagonales D solutions de $(\mathcal{E}_2)$ possibles (à l'aide de λ_1 et λ_2). Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ une matrice diagonale, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
D \text{ solution de } (\mathcal{E}_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \alpha I \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 0 \\ 0 & b^2 - 2b \end{pmatrix} = \alpha I \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - 2a = \alpha \\ b^2 - 2b = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \lambda_1 \\ b = \lambda_2 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = \lambda_2 \\ b = \lambda_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, les matrices diagonales D possibles sont

$$\boxed{\lambda_1 I \ \text{ OU } \ \lambda_2 I \ \text{ OU } \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ \text{ OU } \ \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.}$$

On peut noter que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En effet, soit Δ le discriminant de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$. On a $\Delta = 4 + 4\alpha = 4(\alpha + 1) \neq 0$ car $\alpha \neq -1$.

(c) Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente. Démontrons que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$. Si M est semblable à $\lambda_1 I$, alors il existe P une matrice inversible telle que $M = P\,(\lambda_1 I)\,P^{-1} = \lambda_1 I$. Donc

$$M^2 - 2M = \lambda_1^2 I - 2\,\lambda_1 I = \left(\lambda_1^2 - 2\,\lambda_1\right) I = \alpha I \qquad \text{car } \lambda_1 \text{ solution de } \lambda_1^2 - 2\,\lambda_1 = \alpha$$

Donc M est bien solution de $(\mathcal{E}_2)$. De même si M est semblable à $\lambda_2 I$.

Si M est semblable à $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors il existe P une matrice inversible telle que $M = PD_1P^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned} M^2 - 2M &= P\left(D_1^2 - 2D_1\right)P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 2\,\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 2\,\lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1} \qquad \text{car } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ solutions de } \lambda^2 - 2\,\lambda = \alpha \\ &= P\,(\alpha I)\,P^{-1} \\ &= \alpha I. \end{aligned}$$

De même si M est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{M \text{ est solution de } (\mathcal{E}_2).}$$

(d) Pour $\alpha = 0$, donnons une matrice M non diagonale solution de (E_2) et explicitons ses 4 coefficients. Pour $\alpha = 0$, on a

$$\lambda^2 - 2\,\lambda = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \lambda_1 = 0 \;\text{ OU }\; \lambda = \lambda_2 = 2.$$

Déterminons alors une matrice **non diagonale** semblable par exemple à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice P est inversible et on a $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Posons $M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} M &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors, par la question précédente,

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est une matrice non diagonale solution de } (\mathcal{E}_2)\,.}$$

Vérification :

$$M^2 - 2M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \;\; \textit{OK !}$$