Réponses de l'interrogation 19
Espaces vectoriels

1. (a) Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
   Solution. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)
   $$\forall\,(x,x')\in F^2,\ \forall\,(y,y')\in G^2,\qquad (x+y=x'+y')\qquad\Rightarrow\qquad \begin{cases}x=x'\\ y=y'\end{cases}$$
   si et seulement si (par caractérisation) :
   $$F\cap G=\{0_E\}\,.$$
   (b) Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
   Solution. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si (par définition)
   $$\forall z\in E,\ \exists!\,(x,y)\in F\times G,\quad z=x+y.$$
   si et seulement si (par caractérisation) :
   1. $F\cap G=\{0_E\}$.
   2. $F+G=E$.

   (c) Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
   Solution. Sur les équivalents, il est possible de
   - multiplier,
   - d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
   - de passer à la valeur absolue,
   - de faire un changement de variable.

   Il est cependant interdit
   - de sommer des équivalents,
   - de composer des équivalents par une fonction,
   - d'écrire équivalent à 0.
2. Soit $E=\left\{f\in\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})\;\middle|\;f^{(3)}=f\right\}$. Démontrer si E est un espace vectoriel ou non.
   Solution. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Conclusion,
   $$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$$
3. Soient $F=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1,X^2\right)$ et $G=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P(1)=P(-1)=0\}$. Calculer $F+G$.
   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{F+G=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1,X^2\right).}$$
4. Montrer que $F=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ et $G=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $E=\mathbb{R}^4$.
   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{F\oplus G=E.}$$
5. Déterminer la multiplicité de 2 pour le polynôme $P=X^4-3X^3-6X^2+28X-24$.
   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{2 \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité } 3.}$$