TD3
Trigonométrie

Exercice 1 Soient a, b, et c trois réels tels que les quantités suivantes soient bien définies. Développer $\cos(3a)$ et $\tan(a+b+c)$.

Exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\cos^2(x)\sin^3(x)$.
2. Linéariser $\cos^6(x)$ puis en déduire une linéarisation de $\sin^6(x)$.

Exercice 3

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sin(p)+\sin(q) \neq 0$. Simplifier l'expression $\frac{\cos(p)-\cos(q)}{\sin(p)+\sin(q)}$. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\cos(x) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
3. $\sin(2x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
4. $\cos(x) < \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
5. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$
6. $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) \leqslant 0$
7. $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = 0$
8. $\sin(x)+\sin(3x) > 0$
9. $2\cos^2(x)+5\cos(x)-3 = 0$
10. $4\cos^2(x) - 2\sqrt{3}\cos(x) - 2\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{6} > 0$

Pour aller plus loin

Exercice 6 Soit $P = \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)$. Démontrer que $P = \frac{1}{8}$.
Indication : gardez les angles entre 0 *et* $\frac{\pi}{4}$ *et n'utiliser que la formule* $\sin(2x) = \dots$.

Exercice 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [\pi]$. On pose

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^2(kx) = \cos^2(x) + \cos^2(2x) + \dots + \cos^2(nx)$$
$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^2(kx) = \sin^2(x) + \sin^2(2x) + \dots + \sin^2(nx).$$

1. Calculer $I_n + J_n$ et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$I_n - J_n = \frac{\sin((2n+1)x) - \sin(x)}{2\sin(x)}.$$
2. En déduire les valeurs de I_n et J_n.

Exercice 8 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. Redémontrer les formules de l'angle moitié.
2. Résoudre l'équation $\sin(2\theta) = \frac{3}{2}\tan(\theta)$

Exercice 9 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}^{n-1 \text{ fois}}}{2}$.

RAB

Exercice 10 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 11 Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$
2. $\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$
4. $\cos(2x)+\cos(x) < 0$
5. $\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\cos(x) \leqslant \sin(x)$
7. $\sin^2(x) \geqslant \frac{1}{2}$

Exercice 12 Résoudre les équations suivantes d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(x)+\sin(x) = 1$
2. $\cos(x)+\sin(x) = 0$
3. $\sin(5x)+\sin(x)+2\sin^2(x) = 1$
4. $1-\cos^2(2x) = \sin(2x)\cos(x)$
5. $\cos(2x)+\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$
6. $\cos(2x)+\cos(6x) = 1+\cos(8x)$

Exercice 13 Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x) - \cos(x) - 12 = 0$
2. $4\cos^2(x) - 2\sqrt{3}\cos(x) + 2\cos(x) - \sqrt{3} \leqslant 0$
3. $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) + 1 < 0$