

TD5

Calcul algébrique

Exercice 1

1. Calculer la somme des n premiers entiers impairs.
2. Calculer la somme $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n$.

Exercice 2

 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$
2. $S_n = \sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$
3. $S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3$
4. $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k$
5. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$
6. $S_n = \sum_{k=1}^n e^{3k}$

Exercice 3

 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1. A l'aide de l'exponentielle complexe, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 0$.
2. A l'aide d'un changement d'indice, retrouver le résultat précédent.

Exercice 4

 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire $f(x)$ sous forme d'une somme.
2. Vérifier que f est dérivable et calculer deux expressions de $f'(x)$.
3. A l'aide d'un x bien choisi, en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Exercice 5

 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i$
2. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$
3. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j}$
4. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
5. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|$
6. $\sum_{0 \leq j \leq i \leq n} \binom{i}{j}$

Pour aller plus loin

Exercice 6

 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
2. $S_n = \sum_{k=1}^n k \times k!$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = (1+x)^n$, ainsi que ses dérivées et/ou primitives, (re)trouver les valeurs des sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$
2. $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. A l'aide de leur somme et de leur différence, calculer A_n et B_n .

Rab

Exercice 9 Calculer la somme $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S = \sum_{k=9}^{29} \frac{k-2}{3}$
2. $S_n = \sum_{k=1}^n (4^k + 3k + 2n)$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du changement d'indice $\tilde{k} = n - k$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 13 Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(a) = \sum_{k=1}^n ka^k$.

1. Si $a = 1$, calculer $S_n(1)$.
2. Si $a \neq 1$, à l'aide du changement d'indice $\tilde{k} = k - 1$, calculer $S_n(a)$.
3. On suppose ici que $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En dérivant $x \mapsto T_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$, calculer à nouveau $S_n(a)$, pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 14 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb)$.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$
2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2$
3. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i^2$
4. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2$
5. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$
6. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$
7. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$