

TD7

Equations et géométrie complexes

Exercice 1 Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des complexes suivants.

1. $z_1 = -15 + 8i$
2. $z_2 = 7 - 24i$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.
2. $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$.

Exercice 3 On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ et on définit

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

Calculer $S + T$ et ST et en déduire S et T .

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Exercice 5 Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, I le point d'affixe i et N l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que les points M , I et N sont alignés si et seulement si $(a - \frac{1}{2})^2 + (b - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ et en déduire l'ensemble des points M solutions.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que MIN soit rectangle en I .
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que MIN soit équilatéral.
Donner le résultat sous forme polaire.

Pour aller plus loin

Exercice 6 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Exercice 7 Pour chacun des systèmes suivants, déterminer les complexes $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ solutions.

1. $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u + v = 3 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{9+3i}{10} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 + v^2 = -1 + 2i \end{cases}$
4. $\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^{n-1} + \dots + z + 1$
2. Démontrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = n$.
3. En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Rab

Exercice 9 Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des complexes suivants.

1. $z_1 = 7 + 4i$
2. $z_2 = 9 + 40i$

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

1. $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + 2 - 2i = 0$.
2. $z^4 - (3 + 8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
3. $z^4 + (3 - 6i)z^2 - 2(4 + 3i) = 0$.
4. $z^4 + (2i - 1)z^2 - 1 - i = 0$.

Exercice 11 Déterminer toutes les solutions réelles et imaginaires pures de l'équation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 5 = 0.$$

En déduire toutes les solutions complexes.

Exercice 12 Résoudre l'équation suivante d'inconnu $z \in \mathbb{C}$, $z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i}$.

Exercice 13 Déterminer les racines quatrièmes dans $\mathbb{C}$ du complexe $Z = -119 + 120i$

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $z \in \mathbb{C}$, $z^n = \bar{z}$.

Exercice 15 Soient $A(2 + 4i)$ et $B(8 + i)$ deux points du plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que le triangle OAB est rectangle.

Exercice 16 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifie l'égalité donnée.

1. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$
2. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 17 Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexes.

1. Démontrer que si $c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) + a$ alors,
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$
2. On fixe $a \in \mathbb{C}$ l'affixe de A et $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de C . Déterminer l'ensemble des points $C(c)$, $c \in \mathbb{C}$ vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$. Que peut-on alors dire du triangle ABC ?