

Colle du 09/09 - Sujet 1
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Enoncer le théorème du rang et donner la caractérisation des isomorphismes.
2. Montrer que le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel.

Exercice 1. Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$. On note $\mathcal{L}_F(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E laissant F stable. Montrer que $\mathcal{L}_F(E)$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$.

1. Discuter du degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P .
2. Déterminer le noyau de φ .
3. On pose $Q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \varphi(X^n)$. Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Soit $\Theta : P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$. Montrer que $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\Theta)$.

Colle du 09/09 - Sujet 2
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Définir une base et les coordonnées d'un vecteur dans une base.
2. Montrer que si f est un projecteur de E , alors...

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que Δ est un espace vectoriel et en déterminer une base.
2. Préciser un supplémentaire de Δ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^p$ une famille

libre. On considère $\Psi : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{matrix}$.

1. Montrer que $\text{Ker}(\Psi) = \text{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\varphi_p)$.
2. Déterminer le rang de Ψ .
3. En déduire la dimension de $\text{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\varphi_p)$.

Colle du 09/09 - Sujet 3
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Caractériser les supplémentaires en dimension finie.
2. Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Montrer que $\mathcal{B} = (X - 1, X + 1, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dans cette base.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'ordre n : $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$. Montrer que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$