# Colle du 16/09 - Sujet 1
# Révisions d'algèbre linéaire et d'analyse

**Question de cours**

1. Enoncer la formule de Leibniz.
2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension $n$ est un hyperplan si et seulement si...

**Exercice 1.** Soient $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$ et $g : x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right) - x$.

1. Déterminer le tableau de variations complet de $f$.
2. Exprimer $f$ en fonction des fonctions ch et sh.
3. Déterminer le tableau de variation complet de $g$.
4. Déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe représentative de $g$ en $+\infty$ et sa position relative.
5. Déterminer un équivalent simple de $g$ en 0.

**Exercice 2.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$ tels que $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose

$$r = p + q - p \circ q.$$

1. Montrer que $r$ est un projecteur de $E$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(r) = \mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(q)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\,(r) = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q)$.

---



# Colle du 16/09 - Sujet 2
# Révisions d'algèbre linéaire et d'analyse

**Question de cours**

1. Définir la dérivée en un point. Définir la fonction dérivée.
2. Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

**Exercice 1.** A l'aide de la trace déterminer l'ensemble des matrices $A$ et $B$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

**Exercice 2.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k \,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k(0)$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} f_k(x)$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$
   (b) Expliciter les fonctions $f_0$, $f_1$ et $f_2$.
   (c) Déterminer un équivalent simple de $f_0(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
   (d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{k!}{x^{k+1}}$.
3. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k \,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. En déduire que $f_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $f_k'$ en fonction de $f_k$ puis de $f_{k+1}$.
   (d) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{-u} \geqslant 1 - u$ et en déduire que que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k$ est continue en 0.

**Colle du 16/09 - Sujet 3**
**Révisions d'algèbre linéaire et d'analyse**

**Question de cours**

1. Donner la définition de $F$ stable par $f$, la définition de l'endomorphisme induit et la caractérisation matricielle associée.
2. Soit $x$ un vecteur non nul. Les vecteurs $x$ et $f(x)$ sont colinéaires si et seulement si $\mathrm{Vect}\,(x)$ est stable par $f$.

**Exercice 1**. Soient $E$ un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Im}\,(u^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Im}\,(u) = E$.

**Exercice 2**. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.