Colle du 23/09 - Sujet 1
Intégrales généralisées

Question de cours

1. Enoncer le théorème de changement de variable pour une intégrale généralisée.
2. Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en $+\infty$.

Exercice 1. Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Colle du 23/09 - Sujet 2
Intégrales généralisées

Question de cours

1. Enoncer le théorème d'intégration par parties sur un intervalle qui n'est pas un segment.
2. Montrer que ln est intégrable en 0.

Exercice 1. Nature de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}\,(2x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $F(a)$ converge.
2. Calculer $F(1)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$.
3. En déduire $F(a)$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Colle du 23/09 - Sujet 3
Intégrales généralisées

Question de cours

1. Définir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est intégrable ni en 0 ni en $+\infty$.

Exercice 1. Nature de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+x+1}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ une fonction intégrable et bornée sur I. Montrer que f^2 est intégrable sur I.