Programme de colles 02
Bijection et trigonométrie

Quinzaine du 29 septembre au 10 octobre

Fonctions réelles

1. Révisions du programme précédent sur les fonctions réelles.
2. Asymptote, branche parabolique.
3. Injection, surjection, bijection.
4. Fonction réciproque, graphe de la fonction réciproque.
5. Théorème de la bijection. Théorème de la dérivée de la réciproque.
6. Définition de la relation de négligeabilité (juste la définition).

Trigonométrie

1. Définition géométrique du radian, du cosinus et du sinus. Définition de la fonction tangente comme le rapport du sinus par le cosinus. Ensemble de définition de la fonction tangente.
2. Propriétés des fonctions cosinus, sinus et tangente : parité, périodicité, signe, dérivabilité, dérivées, variations.
3. Valeurs particulières des fonctions trigonométriques. Les étudiants doivent être capables d'étendre les valeurs du premier quart de cercle au reste du cercle et de connaître (ou retrouver rapidement) les formules associées.
4. Limites remarquables (sans démonstration) :
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1.$$
5. Formulaire : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a + b)$, formules de linéarisation $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, cas où $a = b$, formules de factorisation $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
6. Introduction aux congruences, définition $x \equiv y\ [\alpha]$, compatibilité avec l'addition et la soustraction.
7. Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques.
8. Forme polaire de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$: $A\cos(\theta - \varphi)$.

Questions de cours

1. Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
2. Définir une fonction injective, surjective, bijective.
3. Enoncer le théorème de la bijection.
4. Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
5. Définir la négligeabilité entre deux fonctions.
6. Développer $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$.
7. Linéariser $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$.
8. Factoriser $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
9. Valeurs remarquables du sinus, cosinus, tangente.
10. Limites remarquables.
11. Dresser les variations de sinus, cosinus et tangente sur $[0; 2\pi]$.
12. Donner les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions sinus, cosinus, tangente.

Démonstration de cours

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - 1\right)$ définit une bijection de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction réciproque.
2. Démontrer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
3. Montrer que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ à l'aide de limites usuelles.

Les réponses du cours

1. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U, V)$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.
   - L'image directe de A par f est
   $$f(A) = \{ y \in V \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}.$$
   - L'image réciproque de B par f est
   $$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$
2. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U, V)$.
   - On dit que f est injective sur U si et seulement si
   $$\forall (x, y) \in U^2, \qquad (f(x) = f(y)) \qquad \Rightarrow \qquad (x = y).$$
   - On dit que f est surjective sur V si et seulement si
   $$\forall y \in V,\ \exists x \in U, \qquad y = f(x).$$
   - On dit que f est bijective sur U dans V si et seulement si
   $$\forall y \in V,\ \exists! x \in U, \qquad y = f(x).$$
3. Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Si
   - f est continue sur I,
   - et strictement monotone sur I,

   alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus sa réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I, continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).
4. Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Si
   - f est dérivable sur I,
   - strictement monotone sur I,
   - et $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$,

   alors f^{-1} existe, est dérivable sur $J = f(I)$ et
   $$\forall x \in J, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$
5. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^2$. On dit que f est négligeable devant g, $f(x) \underset{x \to a}{\ll} g(x)$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ si
   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$
6. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
   $$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
   Si on suppose de plus a, b, $a+b$ et $a-b$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors
   $$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$
7. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$
   $$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$
   $$\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(b-a)}{2}$$

8. Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

9. On a les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\cos(0)=1, & \sin(0)=0, & \tan(0)=0 \\
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}, & \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}} \\
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, & \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \\
\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, & \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan(x)=+\infty.
\end{array}$$

10. On a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1.$$

11. Pour le cosinus, on a

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Pour le sinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Pour la tangente :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \tan(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	0

12. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

La fonction $f: \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x^2-1\right) \end{array}$ est bijective et sa réciproque est donnée par $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1;+\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{\mathrm{e}^y+1} \end{array}$.

Démonstration. Soit $x>1$. Alors $x^2>1$ puis $x^2-1>0$ et donc $f(x)$ existe. Donc f est bien définie sur $]1;+\infty[$. Soit $(x,y)\in\,]1;+\infty[\times\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y=f(x) \quad\Leftrightarrow\quad y=\ln\left(x^2-1\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y=x^2-1 && \text{car } x^2-1>0 \text{ car } x>1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2=\mathrm{e}^y+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\sqrt{\mathrm{e}^y+1}, && \text{car } x>1\geqslant 0 \text{ et } \mathrm{e}^y+1>0. \end{aligned}$$

On remarque que $\mathrm{e}^y+1>1$ et donc on a bien $x=\sqrt{\mathrm{e}^y+1}>1$. Donc pour tout point $y\in\mathbb{R}$, il existe une unique antécédent $x\in\,]1;+\infty[$ par f. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien bijective et } f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1;+\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{\mathrm{e}^y+1} \end{array}.}$$

□

Proposition (démo 2)

On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

Démonstration. Soit $a\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos(3a)=\cos(2a+a) &= \cos(2a)\cos(a)-\sin(2a)\sin(a) \\ &= \left(2\cos^2(a)-1\right)\cos(a)-2\cos(a)\sin(a)\sin(a) \\ &= 2\cos^3(a)-\cos(a)-2\cos(a)\sin^2(a) \\ &= 2\cos^3(a)-\cos(a)-2\cos(a)\left(1-\cos^2(a)\right) \\ &= 4\cos^3(a)-3\cos(a). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $a=\frac{\pi}{3}$, on obtient que

$$-1=\cos\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)=4\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Posons $X=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Alors,

$$4X^3-3X=-1 \quad\Leftrightarrow\quad 4X^3-3X+1=0.$$

Or on remarque que $4X^3-3X+1=(X+1)\left(4X^2-4X+1\right)=(X+1)(2X-1)^2$. Donc

$$0=(X+1)(2X-1)^2 \quad\Rightarrow\quad X=-1 \text{ ou } X=\frac{1}{2}$$

Or $0<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$ donc par la stricte décroissance du cosinus sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $1>X>0$. Donc $X\neq -1$. Conclusion,

$$\boxed{X=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.}$$

□

Proposition (démo 3)

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a par la formule de développement,

$$\begin{aligned}
\tau_x(h) &= \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \cos(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\,(-h)\,\frac{1 - \cos(h)}{h^2} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}.
\end{aligned}$$

Or on sait que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Donc τ_x admet une limite finie en 0 et

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \tau_x(h) = -\sin(x).$$

Conclusion, la fonction cosinus est dérivable en x et $\cos'(x) = -\sin(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\boxed{\text{cosinus est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos'(x) = -\sin(x).}$$

□