Correction du Devoir Maison 1
Logique et fonctions réelles

Du mardi 23 septembre

Problème I - Logique et raisonnement

Pour tout couple d'assertions P et Q, on définit l'opérateur NAND par

$$\text{NAND}\,(P,Q)\ :\ \textit{non}\,(P \text{ ET } Q)\,.$$

1. Soient P et Q deux assertions. Par la loi de Morgan, on a directement

$$\boxed{\text{NAND}\,(P,Q) \quad\Leftrightarrow\quad \textit{non}\,(P)\ \text{OU}\ \textit{non}\,(Q)\,.}$$

2. Soit P une assertion. On a bien sûr $P \Leftrightarrow P$ ET P. Par conséquent,

$$\textit{non}\,(P) \quad\Leftrightarrow\quad \textit{non}\,(P \text{ ET } P)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\textit{non}\,(P) \quad\Leftrightarrow\quad \text{NAND}\,(P,P)\,.}$$

3. Soient P et Q deux assertions. D'après la question 1., $\text{NAND}\,(P,Q) \Leftrightarrow \textit{non}\,(P)\ \text{OU}\ \textit{non}\,(Q)$. Par conséquent, on a également,

$$\text{NAND}\,(\textit{non}\,(P)\,,\textit{non}\,(Q)) \quad\Leftrightarrow\quad P \text{ OU } Q.$$

Donc par la question précédente,

$$P \text{ OU } Q \quad\Leftrightarrow\quad \text{NAND}\,(\textit{non}\,(P)\,,\textit{non}\,(Q)) \quad\Leftrightarrow\quad \text{NAND}\,(\text{NAND}\,(P,P)\,,\text{NAND}\,(Q,Q))\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{P \text{ OU } Q \quad\Leftrightarrow\quad \text{NAND}\,(\text{NAND}\,(P,P)\,,\text{NAND}\,(Q,Q))\,.}$$

4. Soient P et Q deux assertions. Par définition de l'opérateur NAND,

$$\text{NAND}\,(\text{NAND}\,(P,Q)\,,\text{NAND}\,(P,Q)) \quad\Leftrightarrow\quad \overline{\text{NAND}\,(P,Q)\ \text{ ET NAND}\,(P,Q)}.$$

Or $\text{NAND}\,(P,Q)\ \text{ ET NAND}\,(P,Q) \Leftrightarrow \text{NAND}\,(P,Q)$. Donc

$$\text{NAND}\,(\text{NAND}\,(P,Q)\,,\text{NAND}\,(P,Q)) \quad\Leftrightarrow\quad \overline{\text{NAND}\,(P,Q)} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{\overline{P \text{ ET } Q}} \quad\Leftrightarrow\quad P \text{ ET } Q.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{NAND}\,(\text{NAND}\,(P,Q)\,,\text{NAND}\,(P,Q)) \quad\Leftrightarrow\quad P \text{ ET } Q.}$$

5. Soient P et Q deux assertions. Par définition, on a $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\textit{non}(P)\ \text{OU}\ Q)$. Donc comme dans la question 3., par la loi de Morgan

$$(P \Rightarrow Q) \quad\Leftrightarrow\quad \textit{non}\,(P \text{ ET } \textit{non}\,(Q)) \quad\Leftrightarrow\quad \text{NAND}\,(P,\textit{non}\,(Q))\,.$$

En utilisant la question 2., on conclut

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \quad\Leftrightarrow\quad \text{NAND}\,(P,\text{NAND}\,(Q,Q))\,.}$$

6. Soient P et Q deux assertions. Par définition, on a

$$(P \Leftrightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad (P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P).$$

Donc par la question précédente,

$$(P \Leftrightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad \text{NAND}\left(P, \text{NAND}\left(Q,Q\right)\right) \text{ ET } \text{NAND}\left(Q, \text{NAND}\left(P,P\right)\right).$$

Finalement, par la question 4., on obtient l'assertion

$$\boxed{\text{NAND}\left(\text{NAND}\left(\text{NAND}\left(P,\text{NAND}\left(Q,Q\right)\right),\text{NAND}\left(Q,\text{NAND}\left(P,P\right)\right)\right),\text{NAND}\left(\text{NAND}\left(P,\text{NAND}\left(Q,Q\right)\right),\text{NAND}\left(Q,\text{NAND}\left(P,P\right)\right)\right)\right).}$$

NB : On dit qu'un connecteur est ***universel*** *s'il permet d'exprimer à lui seul les connecteurs non, ET et OU .*

Problème II - Continuité vs Continuité uniforme

On note $F = \mathscr{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et on considère les assertions suivantes

$$\mathscr{C}(f) : « \forall \varepsilon \in]0;1], \forall x \in \mathbb{R}_+, \exists \eta \in]0;1], \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon) ».$$
$$\mathscr{U}(f) : « \forall \varepsilon \in]0;1], \exists \eta \in]0;1], \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon) ».$$

1. Soient $f \in F$, $\varepsilon \in]0;1]$, $\eta \in]0;1]$, $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$. Enonçons la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication
$$P : « |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon ».$$
La réciproque de P est donnée par
$$\boxed{« |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |x-y| \leqslant \eta ».}$$
La contraposée de P est donnée par
$$\boxed{« |f(x)-f(y)| > \varepsilon \Rightarrow |x-y| \geqslant \eta ».}$$
La négation de P est donnée par
$$\boxed{« |x-y| \leqslant \eta \text{ ET } |f(x)-f(y)| > \varepsilon ».}$$

2. Soit $f \in F$. La négation de $\mathscr{C}(f)$ est donnée par
$$\boxed{\overline{\mathscr{C}(f)} : « \exists \varepsilon \in]0;1], \exists x \in \mathbb{R}_+, \forall \eta \in]0;1], \exists y \in \mathbb{R}_+, \quad (|x-y| \leqslant \eta \text{ ET } |f(x)-f(y)| > \varepsilon) ».}$$
La négation de $\mathscr{U}(f)$ est donnée par
$$\boxed{\overline{\mathscr{U}(f)} : « \exists \varepsilon \in]0;1], \forall \eta \in]0;1], \exists (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta \text{ ET } |f(x)-f(y)| > \varepsilon) ».}$$

3. Soient $a \geqslant 1$ et $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & ax \end{array}$.

   (a) Soient $\eta \in]0;1]$ et $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Déterminons un majorant de $|f(x)-f(y)|$ en fonction uniquement de a et η. Par définition de f, on a
   $$|f(x)-f(y)| = |ax-ay| = |a(x-y)| = |a|\,|x-y| = a\,|x-y| \qquad \text{car } a \geqslant 1 \geqslant 0.$$
   Or $|x-y| \leqslant \eta$ et $a \geqslant 0$ donc $a\,|x-y| \leqslant a\eta$. Ainsi,
   $$\boxed{|f(x)-f(y)| \leqslant a\eta.}$$

(b) Soit $\varepsilon \in]0;1]$. Déterminons $\eta \in]0;1]$ pour que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

Par la question précédente si on prend η tel que $\varepsilon = a\eta$ alors on aura l'implication souhaitée. Posons donc $\eta = \frac{\varepsilon}{a}$ car $a \neq 0$. De plus $0 < \varepsilon \leqslant 1$ et $a \geqslant 1$ donc $0 < \frac{1}{a} \leqslant 1$. Par produit, $0 < \frac{\varepsilon}{a} \leqslant 1$ et on a bien

$$\eta = \frac{\varepsilon}{a} \in]0;1].$$

De plus, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, par la question précédente si $|x-y| \leqslant \eta$, alors

$$|f(x)-f(y)| \leqslant a\eta = a\frac{\varepsilon}{a} = \varepsilon.$$

Conclusion, pour $\eta = \frac{\varepsilon}{a}$, on a $\boxed{\eta \in]0;1]}$ et

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon).}$$

(c) Déduisons-en que $\mathscr{U}(f_a)$ est vraie. Par la question précédente, pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, on a trouvé un $\eta \in]0;1]$ tel que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon \in]0;1], \exists \eta \in]0;1], \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{U}(f_a) \text{ est vraie.}}$$

On fixe dans la suite $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

4. Soient $\varepsilon \in]0;1]$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{2x+1}$.

(a) Justifions que $\eta \in]0;1]$. On a $x \geqslant 0$ donc $2x+1 \geqslant 1$ puis $0 < \frac{1}{2x+1} \leqslant 1$. De plus, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Ainsi, par produit,

$$0 < \eta = \frac{\varepsilon}{2x+1} \leqslant 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\eta \in]0;1].}$$

(b) Justifions que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, si $|x-y| \leqslant \eta$ alors $x+y \leqslant 2x+\eta \leqslant 2x+1$. Supposons $|x-y| \leqslant \eta$ autrement dit

$$-\eta \leqslant x-y \leqslant \eta \quad \Leftrightarrow \quad -\eta - x \leqslant -y \leqslant \eta - x \quad \Leftrightarrow \quad x+\eta \geqslant y \geqslant x-\eta.$$

Donc

$$x+y \leqslant x+x+\eta = 2x+\eta \leqslant 2x+1 \qquad \text{car } \eta \leqslant 1 \text{ par la question précédente.}$$

Conclusion,

$$\boxed{x+y \leqslant 2x+\eta \leqslant 2x+1.}$$

(c) Déduisons-en que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, si $|x-y| \leqslant \eta$, alors $|g(x)-g(y)| \leqslant \eta\,(2x+1)$. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Supposons $|x-y| \leqslant \eta$. Alors :

$$|g(x)-g(y)| = \left|x^2-y^2\right| = |(x-y)\,(x+y)| = |x-y|\,|x+y| \leqslant \eta\,|x+y|\,.$$

Or $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$. Donc $x+y \geqslant 0$ et

$$|x+y| = x+y \leqslant 2x+1 \qquad \text{par la question précédente.}$$

Par produit,

$$|g(x)-g(y)| \leqslant \eta\,|x+y| \leqslant \eta\,(2x+1)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad |x-y| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; |g(x)-g(y)| \leqslant \eta\,(2x+1)\,.}$$

(d) Par définition, $\eta = \frac{\varepsilon}{2x+1}$. Donc $\eta\,(2x+1) = \varepsilon$. On en déduit donc que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad |x-y| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; |g(x)-g(y)| \leqslant \varepsilon\,.$$

En résumé, pour tout $\varepsilon \in \,]0;1]$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on peut trouver un $\eta \in \,]0;1]$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad |x-y| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; |g(x)-g(y)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Mathématiquement,

$$\forall\,\varepsilon \in \,]0;1]\,,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \exists \eta \in \,]0;1]\,,\ \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad |x-y| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; |g(x)-g(y)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C}\,(g) \text{ est vraie.}}$$

5. On fixe $\varepsilon = 1$. Soit $\eta \in \,]0;1]$. On pose $y = \frac{1}{\eta}$ et $x = \frac{1}{\eta} + \eta$.

(a) Montrons que $|x-y| \leqslant \eta$ et que $|g(x)-g(y)| > 1$. On a

$$x - y = \frac{1}{\eta} + \eta - \frac{1}{\eta} = \eta > 0.$$

Donc $x-y>0$ et donc $|x-y| = x-y = \eta$. En particulier,

$$|x-y| \leqslant \eta.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
|g(x)-g(y)| &= \left|x^2-y^2\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{\eta}+\eta\right)^2 - \left(\frac{1}{\eta}\right)^2\right| \\
&= \left|\frac{1}{\eta^2} + 2 + \eta^2 - \frac{1}{\eta^2}\right| \\
&= \left|2+\eta^2\right| \\
&= 2+\eta \qquad \text{car } 2+\eta \geqslant 0 \\
&\geqslant 2 \qquad \text{car } \eta > 0 \\
&> 1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{|x-y| \leqslant \eta \qquad \text{ET} \qquad |g(x)-g(y)| > 1.}$$

(b) Par la question précédente, il existe $\varepsilon \in]0;1]$ tel que pour tout $\eta \in]0;1]$, on a trouvé deux réels $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ tels que

$$|x-y| \leqslant \eta \quad \text{ET} \quad |g(x)-g(y)| > 1 = \varepsilon\,.$$

Donc

$$\exists\, \varepsilon \in]0;1]\,,\ \forall \eta \in]0;1]\,,\ \exists\,(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,, \quad |x-y| \leqslant \eta \quad \text{ET} \quad |g(x)-g(y)| > \varepsilon\,.$$

Par la question 2. on reconnait $\overline{\mathscr{U}\,(g)}$. On en déduit que

$$\boxed{\mathscr{U}\,(g) \text{ est fausse.}}$$

6. Pour tout $f \in F$, déterminons une implication entre $\mathscr{C}(f)$ et $\mathscr{U}(f)$ puis justifions que la réciproque est fausse en général.

Soit $f \in F$. On note que si $\mathscr{U}\,(f)$ est vraie, alors pour un même η, la propriété $|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$ est vrai POUR TOUS les $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Donc si on fixe un x avant, ce même même η marchera encore pour tous les y :

$$\boxed{\forall f \in F, \quad \mathscr{U}\,(f) \Rightarrow \mathscr{C}\,(f)\,.}$$

Cependant, par les questions 4. et 5.

$$\exists g \in F, \quad \mathscr{U}\,(g) \quad \text{ET} \quad \overline{\mathscr{C}\,(f)}.$$

Conclusion, la réciproque

$$\boxed{\forall f \in F, \quad \mathscr{C}\,(f) \Rightarrow \mathscr{U}\,(f) \qquad \text{est fausse.}}$$

Problème III - Fonctions réelles

On considère les fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto 2x^3 - 1 + 2\ln(x) \qquad \text{et} \qquad f : x \mapsto 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Partie 1 : Quand $\mathbb{R}_+^*$ est en bijection avec $\mathbb{R}$

1. La fonction cube et la fonction constante égale à -1 sont définies sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ uniquement. Conclusion, le domaine de définition de g est donné par

$$\boxed{I = \mathbb{R}_+^*.}$$

2. L'ensemble de définition de g est bien loin d'être centré en 0 il est donc illusoire d'espérer g paire ou impaire :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

3. En 0^+, on a $2x^3 \to 0$, $-1 \to -1$ et $2\ln(x) \to -\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$.

En $+\infty$, on a $2x^3 - 1 \to +\infty$ et $2\ln(x) \to +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

4. La fonction g est dérivable sur son domaine de définition I en tant que somme de fonctions qui le sont. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}.$$
Or pour tout $x > 0$, $6x^2 > 0$ et $\frac{2}{x} > 0$ donc $g(x) > 0$. Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$
g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

5. La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$. De plus, $0 \in]-\infty; +\infty[= g(I)$. Donc par le **corollaire** des valeurs intermédiaires (ou le théorème de la bijection), on en déduit que
$$\boxed{\exists! \alpha \in I, \quad g(\alpha) = 0.}$$

6. Calculons :
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{8} - 1 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 - 2\ln(2) = -\frac{3}{4} - \ln(2) < 0 = g(\alpha).$$
De plus,
$$g(1) = 2 - 1 + 0 = 1 > 0 = g(\alpha).$$
Donc $g\left(\frac{1}{2}\right) < g(\alpha) < g(1)$. Donc par la stricte croissance de g, on en déduit que
$$\boxed{\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[.}$$

7. Puisque $\alpha < 1$, par la stricte croissante de la fonction logarithme, on a
$$\boxed{\ln(\alpha) < \ln(1) = 0.}$$
Or $g(\alpha) = 2\alpha^3 - 1 + 2\ln(\alpha) = 0$. Donc
$$\boxed{2\alpha^3 - 1 = -2\ln(\alpha) > 0.}$$

Partie 2 : Lorsque f déprime, il peut s'appuyer sur g

8. La fonction $x \mapsto 2x$, logarithme et la fonction inverse sont définies, continues et même dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien définie et dérivable sur } I = \mathbb{R}_+^*}$.

9. Pour tout $x > 0$, on a
$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = 2 - \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln(x)}{x^3}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.}$$

10. Or par le tableau de variation de g, on observe que

$$\forall x \in]0;\alpha[\,,\quad g(x) < 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]\alpha;+\infty[\,,\quad g(x) > 0.$$

Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que

$$\forall x \in]0;\alpha[\,,\quad f'(x) < 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]\alpha;+\infty[\,,\quad f'(x) > 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$. Déterminons les limites aux bornes. En 0^+, on a $2x \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ et $\ln(x) \to -\infty$. Donc par produit $-\frac{\ln(x)}{x^2} \to +\infty$. Ainsi par somme

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.$$

En $+\infty$, on a $\ln(x) \to +\infty$ mais $\frac{1}{x^2} \to 0$. Cependant, par croissance comparée, $\frac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, $2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par somme :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Conclusion,

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

11. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas majorée sur } I}$. A contrario, par la question précédente, on observe que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant \beta$. Conclusion, $\boxed{f \text{ est minorée par } \beta \text{ sur } I}$. La fonction f n'étant pas majorée, a fortiori, $\boxed{f \text{ n'est pas bornée}}$.

12. Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geqslant \beta$. Montrons que β est strictement plus grand que 1. On a

$$\beta = f(\alpha) = 2\alpha - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}.$$

Or $1 > \alpha > \frac{1}{2}$ donc par la stricte croissance du logarithme,

$$0 > \ln(\alpha) > \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < -\ln(\alpha) < \ln(2).$$

Ainsi, $-\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} > 0$ donc

$$\beta > 2\alpha > 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\beta > 1.}$$

13. On commence par noter que $f(1) = 2 - 0 = 2$. On peut donc compléter notre tableau de variation comme suit :

x	0	γ	α	1	$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow 2 \searrow$	β	$\nearrow 2 \nearrow$	$+\infty$

Ainsi, on en déduit que

(a) $\boxed{f\left(]0;1[\right) = [\beta;+\infty[\,.}$

(b) $\boxed{f\left([\alpha;+\infty[\right) = [\beta;+\infty[\,.}$

(c) $\boxed{f^{\leftarrow}\left(]1;+\infty[\right) = I = \mathbb{R}_+^*}$ car $\beta > 0$.

(d) $\boxed{f^{\leftarrow}\left([2;+\infty[\right) =]0;\gamma] \cup [1;+\infty[}$

14. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Puis,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{\ln(x)}{x^3}.$$
Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3} = 0$. Ainsi,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$
Ensuite, toujours par croissance comparée,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{x^2} = 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la droite } y = 2x \text{ est asymptote oblique à la courbe représentative de } f.}$$

15. Pour tout $x \in I$, on a $f(x) - 2x = -\frac{\ln(x)}{x^2}$. Pour tout $x > 1$, $\ln(x) > 0$. Ainsi,
$$\forall x > 1, \quad f(x) - 2x < 0.$$
Conclusion, $\boxed{\text{sur } [1;+\infty[\text{, le graphe de } f \text{ est en-dessous de son asymptote } y = 2x}$.

16. Par les questions précédentes :