Devoir Maison 2
Bijections, trigonométrie, complexes

A faire pour le mardi 14 octobre

Problème I - Bijection

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

1. Déterminer I le domaine de définition de f.
2. Déterminer la parité de f.
3. Déterminer les limites de f aux bords de I.

   On pourra commencer par factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme prépondérant.
4. Déterminer le tableau de variations complet de f.
5. Montrer que f définit une bijection de I dans J, où J est un intervalle que l'on déterminera. On note $g = f^{-1}$ sa réciproque.
6. Justifier que g est dérivable et pour tout $y \in J$, exprimer $g'(y)$ en fonction de $\mathrm{e}^{g(y)}$ et $\mathrm{e}^{-g(y)}$.
7. Soit $(X, y) \in \mathbb{R}_+^* \times J$. Montrer que
$$\frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = y \Leftrightarrow X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$
8. En déduire $g(y)$ pour tout $y \in J$.
9. Déterminer g' par deux méthodes.

Problème II - Trigonométrie

Partie 1 : L'étoile polaire vous guidera vers l'inconnue

1. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)$ et $Z = z_1 z_2$.
   (a) Déterminer une forme trigonométrique pour chacun des complexes z_1, z_2 et Z.
   (b) Calculer la forme algébrique de Z.
   (c) En déduire les valeurs de $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$.
   (d) En déduire que :
   $$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
2. (a) Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$(1-\sqrt{3})\cos x - (1+\sqrt{3})\sin x = \sqrt{6}$$
   Vous préciserez l'ensemble solution sous notation ensembliste et vous représenterez les solutions sur le cercle trigonométrique.
   (b) Préciser les solutions qui sont dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Partie 2 : Suivez les instructions du facteur à la lettre

Le but de cette partie est de résoudre de deux façons différentes l'équation trigonométrique suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \qquad \cos(2x) + \cos(3x) = \sin(2x) + \sin(3x)$$

3. (a) Donner la forme polaire de l'expression $\cos(2x) - \sin(2x)$.
   (b) Donner la forme polaire de l'expression $\sin(3x) - \cos(3x)$.
   (c) En déduire la résolution de (E) dans $\mathbb{R}$.
4. (a) Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Simplifier l'expression $e^{ip} + e^{iq}$ à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié.
   (b) Retrouver alors les formules de factorisation $\cos p + \cos q$ et $\sin p + \sin q$.
   (c) En déduire à nouveau la résolution de (E) dans $\mathbb{R}$.

Partie 3 : Développez vos sinus pour mieux sentir le problème

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.
   (b) En déduire que :
   $$\sin(3x) + 1 - \cos(2x) - \sin x = 2(\sin x)(-2\sin^2 x + \sin x + 1)$$
6. Résoudre l'équation $2X(-2X^2 + X + 1) = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.
7. Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation étudiée dans $\mathbb{R}$, puis préciser celles qui appartiennent à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Problème III - Complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \frac{|z|+z}{2}$.

Partie 1 : Ce qui n'est pas réel, est souvent d'une certaine complexité

1. Calculer $f(4-2i)$ sous forme algébrique et préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Calculer $f\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ sous forme algébrique et polaire.
3. Déterminer l'ensemble $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z| \leqslant 1 \Rightarrow |f(z)| \leqslant 1$.
5. Montrer qu'il existe un unique complexe $z \in \mathbb{U}$ que l'on déterminera tel que $f(z) \in \mathbb{U}$.

Partie 2 : Des modules non lunaires mais qui permettent d'aller loin

Soit $\theta_0 \in]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$ et $z_0 = \mathrm{e}^{i\theta_0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{n+1} = f(z_n) = \frac{|z_n| + z_n}{2}.$$

On note également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de y_{n+1} en fonction de y_n. En déduire une expression de y_n en fonction de n et θ_0.
7. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq 0$.

Par la question précédente, il est possible de donner la forme polaire de z_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = \arg(z_n) \in]-\pi;\pi]$.

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente et en justifiant une relation de récurrence entre r_{n+1} et r_n ainsi qu'entre θ_{n+1} et θ_n.
10. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$
11. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de y_n sous forme de produit puis montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.$$
12. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \frac{\sin(u)}{u}$.
13. En déduire
$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$