

Epreuve de mathématiques 1

2025-2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroté les copies



Problème 1 - Logique

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant la propriété $A(f)$ suivante :

$$A(f) : \ll \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) + f(y)| = |x + y| \gg.$$

Partie 1 : Préliminaires

Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit les assertions suivantes :

$$P(g) : \ll (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x) \text{ OU } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -x) \gg$$

$$Q(g) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, (g(x) = x \text{ OU } g(x) = -x) \gg.$$

1. Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Enoncer avec des quantificateurs $\overline{P(g)}$ et $\overline{Q(g)}$.
2. Quelle assertion implique l'autre ? *Aucune justification n'est ici exigée.*
3. Démontrer par un exemple que la réciproque est fausse en général.

Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose également

$$R(g) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| = |x| \gg.$$

4. A quelle assertion est équivalente $R(g)$? *Aucune justification n'est ici exigée.*
5. Donner un exemple simple de fonction f vérifiant $A(f)$

Partie 2 : Conséquence de $A(f)$

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $A(f)$ soit vraie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|.$$

6. Montrer alors que $f(0) = 0$.
7. En déduire que $R(f)$ est vraie.
8. On suppose dans cette question (et dans cette question uniquement) que $P(f)$ est fausse.
 - (a) Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ **non nul** tel que $f(x) \neq x$ et qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ **non nul** tel que $f(y) \neq -y$.
 - (b) Montrer que $f(x) = -x$ et $f(y) = y$.
 - (c) A l'aide de $A(f)$, en déduire une contradiction.
9. Justifier $P(f)$ est vraie.

Partie 3 : Conclusion

10. En précisant le raisonnement utilisé, déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $A(f)$.

Problème 2 - Fonctions réelles

L'objectif de ce problème est de résoudre qualitativement l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in]0; +\infty[$:

$$(E) \quad x^{x+1} = (x+1)^x$$

Partie 1 : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \ln(x) - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

où $\mathcal{D}_f$ désigne son ensemble de définition.

1. Déterminer avec soin l'ensemble $\mathcal{D}_f$.
2. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, puis vérifier que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1 + x \ln(x)}{x} + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$$

3. Déterminer les limites de la fonction f' en 0^+ et $+\infty$.
4. (a) Justifier que la fonction f' est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
(b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f''(x) < 0$.
5. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f' .
6. Montrer que pour tout $t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.
7. En déduire que :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \ln(x) - 1 \leq f(x) \leq \ln(x)$$
8. Justifier alors que la fonction f admet une limite en 0^+ et en $+\infty$, puis en préciser les valeurs.
9. La courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes verticales, horizontales ou obliques ?
Justifier, et donner une équation des éventuelles asymptotes.
10. Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f .

Partie 2 : Résolution qualitative de l'équation (E)

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que résoudre l'équation (E) est équivalent à résoudre une équation ne dépendant que de $f(x)$.
12. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera α .
13. Montrer que $\alpha \in]2; 3[$.
14. Tracer avec grand soin :
(i) en vert, les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ,
(ii) en rouge, les courbes respectives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(x) - 1$,
(iii) en bleu, la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .
Placer également α .

Problème 3 - Bijections

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 16}{2x}.$$

Partie 1 : Etude de f

1. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f .
2. Déterminer la parité de f . Que peut-on en déduire sur son graphe ?
3. Calculer la dérivée de f sur $U =]0; +\infty[$.
4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point $x = 1$.
5. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation.
6. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.
7. Déterminer le tableau de variations complet de f sur U .
8. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$.
9. En déduire

$$f(]-4; 0[\cup]0; 4]) \quad \text{et} \quad f(]0; 8]).$$

10. Préciser également

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad f^{\leftarrow}(]4; +\infty[).$$

Partie 2 : Etude de f^{-1}

11. Démontrer que f définit une bijection de $I =]0; 4]$ dans un ensemble J à déterminer. On note g sa fonction réciproque.
12. Préciser, sans calcul, le tableau de variation de g .
13. Démontrer que g est dérivable sur $J' = J \setminus \{4\}$.
14. Calculer $g(5)$.
15. En déduire $g'(5)$.
16. Montrer que pour tout $y \in J'$,

$$y + \sqrt{y^2 - 16} > 4 \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2 - 16} < 4.$$

17. En déduire pour tout $y \in J$ la valeur de $g(y)$.
18. Retrouver le résultat de la question 13. et calculer g' sur J' .
19. Retrouver le résultat de la question 15.

Partie 3 : Etude d'une suite récurrente

Soit $x_0 \in [4; +\infty[$. On pose $u_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 16}{2u_n}$.

20. Soit $x > 0$. On considère l'implication $I : (x \geq 4) \Rightarrow (f(x) \geq 4)$.

(a) Justifier que I est vraie.

(b) Enoncer mathématiquement la réciproque, la négation et la contraposée de I . Dans chaque cas, préciser sa valeur de vérité.

21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$.

22. Pour tout $x \geq 4$, on pose $h(x) = f(x) - x$. Calculer $h(x)$ et préciser son signe.

23. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

24. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on note ℓ sa limite.

25. Exprimer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 16}{2u_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ en fonction de ℓ puis en déduire que $\ell = 4$.

Partie 4 : Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $\varphi : [4; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$(E) \quad \forall x \in [4; +\infty[, \quad \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x^2 + 16}{2x}\right).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{E}$.

26. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \varphi(u_n)$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.

27. En déduire que $\varphi(x_0) = \varphi(4)$.

28. Conclure en déterminant $\mathcal{E}$.