Corrigé du Devoir Surveillé 2
Complexes, calcul algébrique

Problème I - Trigonométrie

On pose
$$\theta = \frac{\pi}{5}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Par le cours, on a directement
   $$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \qquad \textit{par la relation fondamentale}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.}$$

   (b) On a les égalités suivantes :
   $$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\ &= \left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x)\sin(x) \qquad \textit{par la question précédente}\\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x)\\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right)\\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$
   Vérifions notre résultat, si $x = 0$, on a bien $4\cos^3(0) - 3\cos(0) = 4 - 3 = 1 = \cos(3x)$. Conclusion,
   $$\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).}$$

   (c) On a les égalités suivantes :
   $$\begin{aligned}\sin(3x) = \sin(2x+x) &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)\\ &= 2\cos^2(x)\sin(x) + \sin(x)\left(1 - 2\sin^2(x)\right)\\ &= 2\left(1 - \sin^2(x)\right)\sin(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)\\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x).\end{aligned}$$
   Vérifions, si $x = \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(3x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et on a bien $3\sin(x) - 4\sin^3(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - 4 = -1$. Conclusion,
   $$\boxed{\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).}$$

Partie 1 : Première méthode

2. On a
$$2025\theta = \frac{2025}{5}\pi = \frac{202 \times 10 + 5}{5}\pi = 202 \times 2\pi + \pi \equiv \pi \ [2\pi].$$
La fonction cosinus étant 2π périodique, on en déduit que
$$\boxed{\cos(2025\theta) = \cos(\pi) = -1.}$$

3. On observe que
$$3\theta = \frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5} = \pi - 2\theta.$$
Par conséquent,
$$\boxed{\cos(3\theta) = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos(2\theta).}$$

4. A l'aide des questions 1.a et 1.b, on en déduit directement que
$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = -\left(2\cos^2(\theta) - 1\right) = 1 - 2\cos^2(\theta).$$
Conclusion,
$$\boxed{4\cos^3(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 3\cos(\theta) - 1 = 0.}$$

5. *Méthode 1.* Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. En développant, on remarque que
$$(X+1)\left(aX^2 + bX + c\right) = aX^3 + bX^2 + cX + aX^2 + bX + c = aX^3 + (a+b)X^2 + (b+c)X + c.$$
On remarque alors que si
$$\begin{cases} a = 4 \\ a + b = 2 \\ b + c = -3 \\ c = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 - a = 2 - 4 = -2 \\ b + c = -2 - 1 = -3 \text{ ok} \\ c = -1 \end{cases}$$
alors, on a bien
$$(X+1)\left(aX^2 + bX + c\right) = 4X^3 + 2X^2 - 3X - 1.$$
Conclusion, $\boxed{\text{pour } a = 4,\ b = -2 \text{ et } c = -1, \text{ on a } 4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = (X+1)\left(aX^2 + bX + c\right)}$.

Méthode 2. On a $4(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) - 1 = -4 + 2 + 3 - 1 = 0$. Donc -1 est une racine de $4X^3 + 2X^2 - 3X - 1$. Ainsi, en factorisant
$$4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = (X+1)\left(4X^2 - 2X - 1\right).$$
Conclusion, $\boxed{\text{pour } a = 4,\ b = -2 \text{ et } c = -1, \text{ on a } 4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = (X+1)\left(aX^2 + bX + c\right)}$.

6. Nous avions $4\cos^3(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 3\cos(\theta) - 1 = 0$. Posons $X = \cos(\theta)$. Alors par la question précédente, on en déduit que
$$(X+1)\left(4X^2 - 2X - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X + 1 = 0 \text{ OU } 4X^2 - 2X - 1.$$
Soit Δ le discriminant de $4X^2 - 2X - 1$, on a $\Delta = 4 + 16 = 20$. Ainsi les racines associées sont $\frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Dès lors,
$$X = -1 \text{ OU } X = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ OU } X = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$
Or $\theta = \frac{\pi}{5} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $X = \cos(\theta) \in]0;1[$. Comme $-1 < 0$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$, on en déduit que $X = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Conclusion,
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

7. Commençons par calculer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Par la relation fondamentale,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1-\frac{1+5+2\sqrt{5}}{16} = 1-\frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

Donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Or $\theta = \frac{\pi}{5} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin(\theta) > 0$. Ainsi,

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}{\frac{1+5+2\sqrt{5}}{16}}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}\\ &= \sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5}}\\ &= \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{4}}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}.}$$

Partie 2 : Deuxième méthode

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \equiv 0 \ [\pi]\\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv 0 \ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = 2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$$

9. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}(2\cos(\varphi)+1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) &= 2\cos(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\ &= \sin\left(\varphi+\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}-\varphi\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad \textit{car le sinus est impair}\\ &= \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathbb{R}, \qquad (2\cos(\varphi)+1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right).}$$

10. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0; 2\pi[$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi) &= \cos(a) + \cos(a+2\varphi) + \cos(a+\varphi) \\
&= 2\cos\left(\frac{a+a+2\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{a-(a+2\varphi)}{2}\right) + \cos(a+\varphi) \\
&= 2\cos(a+\varphi)\cos(-\varphi) + \cos(a+\varphi) \\
&= 2\cos(a+\varphi)\cos(\varphi) + \cos(a+\varphi) \qquad \textit{par parité du cosinus} \\
&= (2\cos(\varphi)+1)\cos(a+\varphi).
\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $(2\cos(\varphi)+1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$. De plus $\varphi \in]0; 2\pi[$ donc $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, d'après la question 8., on en déduit que $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0$. Dès lors,

$$2\cos(\varphi) + 1 = \frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Ainsi,

$$\cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi) = \frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cos(a+\varphi).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varphi \in]0; 2\pi[\,, \qquad \cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a+2\varphi) = \cos(a+\varphi)\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.}$$

11. Prenons $a = \theta$ et $\varphi = 2\theta = \frac{2\pi}{5} \in]0; 2\pi[$. Alors par la question précédente,

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) = \cos(3\theta)\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Observons que $5\theta = \pi$ et donc $\cos(5\theta) = \cos(\pi) = -1$. De plus,

$$\cos(3\theta)\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\cos(3\theta)\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(6\theta)}{2\sin(\theta)}.$$

Or $6\theta = \frac{6\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + \pi = \theta + \pi$. D'où, $\sin(6\theta) = -\sin(\theta)$ et par suite,

$$\cos(3\theta)\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{-\sin(\theta)}{2\sin(\theta)} = -\frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}.}$$

12. Par une formule du cours, on a

$$\cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{\cos(\theta+3\theta) + \cos(\theta-3\theta)}{2} = \frac{\cos(4\theta) + \cos(-2\theta)}{2}.$$

Par parité du cosinus, on en déduit que

$$\boxed{\cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{\cos(4\theta) + \cos(2\theta)}{2}.}$$

13. On a vu à la question 3. que $\cos(2\theta) = -\cos(3\theta)$. De plus, $\cos(4\theta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$. Ainsi,

$$\cos(\theta)\cos(3\theta) = \frac{-\cos(\theta) - \cos(3\theta)}{2} = -\frac{1}{2}(\cos(\theta) + \cos(3\theta)).$$

Donc par la question 11., on en déduit que

$$\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}.}$$

14. Par la question 11., on a

$$\cos(3\theta) = \frac{1}{2} - \cos(\theta).$$

Donc par la question précédente,

$$-\frac{1}{4} = \cos(\theta)\cos(3\theta) = \cos(\theta)\left[\frac{1}{2} - \cos(\theta)\right] = \frac{1}{2}\cos(\theta) - \cos^2(\theta).$$

Conclusion, $\cos(\theta)$ vérifie l'équation d'inconnue $X \in \mathbb{R}$, suivante :

$$\boxed{X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0.}$$

15. Soit Δ le discriminant de cette équation. On a $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$. Donc les racines associées sont $\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Or $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, $\cos(\theta) > 0$. Or $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$. Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Partie 3 : Une inéquation trigonométrique

On souhaite résoudre l'inéquation trigonométrique suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \qquad \cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \cos(4x)).$$

16. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $A = \cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x)$.

(a) Par la question 1., on a $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ et $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= \cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) \\ &= 3\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos^3(x)\sin^3(x) + 4\sin^3(x)\cos^3(x) - 3\sin^3(x)\cos(x) \\ &= 3\cos^3(x)\sin(x) - 3\sin^3(x)\cos(x). \end{aligned}$$

Conclusion, en factorisant par $3\cos(x)\sin(x)$,

$$\boxed{A = 3\cos(x)\sin(x)\left[\cos^2(x) - \sin^2(x)\right].}$$

(b) On sait que $\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$. Ainsi,

$$A = \frac{3}{2}\sin(2x)\cos(2x) = \frac{3}{4}\sin(4x).$$

Conclusion, $\boxed{A = \lambda\sin(u) \text{ avec } \lambda = \frac{3}{4} \text{ et } u = 4x}$.

17. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par ce qui précède, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(E) \qquad & \cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\cos(4x)) \\
\Leftrightarrow \qquad & A \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\cos(4x)) \\
\Leftrightarrow \qquad & \frac{3}{4}\sin(4x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\cos(4x)) \\
\Leftrightarrow \qquad & \sqrt{3}\sin(4x) + \cos(4x) \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Cherchons la forme polaire/normalisée du terme de gauche. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin(4x) + \cos(4x) &= 2\left(\frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(4x)\right) \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(4x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(4x)\right) \\
&= 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad & 2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1 \\
\Leftrightarrow \qquad & \cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow \qquad & \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 4x - \frac{\pi}{3} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
\Leftrightarrow \qquad & \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 4x \leqslant 2\pi + 2k\pi \\
\Leftrightarrow \qquad & \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\,;\,(k+1)\frac{\pi}{2}\right].}$$

Problème II - Complexes

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z^2+\alpha}{2z} \end{array}$$

Partie 1 : Quelques calculs

1. On sait que $2i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$. De plus, on a les égalités entre complexes suivantes :

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Conclusion, les formes polaires demandées sont données par

$$\boxed{2i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad \sqrt{3}-i = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}.}$$

2. On suppose que $\alpha = 4i$.

(a) Par définition de f, on a les égalités suivantes entre complexes :

$$\begin{aligned} f(2i) &= \frac{(2i)^2+4i}{4i} \\ &= \frac{-4+4i}{4i} \\ &= \frac{-1+i}{i} \\ &= (-1+i)(-i) \\ &= i+1. \end{aligned}$$

Puis,

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(2i)=1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

(b) De la même façon,

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{3}-i\right) &= \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^2+4i}{2\left(\sqrt{3}-i\right)} \\ &= \frac{3-2\sqrt{3}i-1+4i}{2\left(\sqrt{3}-i\right)} \\ &= \frac{2-2\sqrt{3}i+4i}{2\left(\sqrt{3}-i\right)} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}i+2i}{\sqrt{3}-i} \\ &= \frac{\left(1-\sqrt{3}i+2i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{3+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+i-3i+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-2}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-2-2i+2\sqrt{3}i}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}-1\right)i}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i). \end{aligned}$$

De là, on en déduit que

$$f\left(\sqrt{3}-i\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(\sqrt{3}-i\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

3. On suppose que $\alpha=1$.

(a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Notamment, $z \neq 0$, donc $f(z)$ existe. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) = \overline{f(z)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{z^2+1}{2z} = \overline{\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad z^2\overline{z} + \overline{z} = z\overline{z}^2 + z \qquad \text{car } z \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z\,|z|^2 + \overline{z} = \overline{z}\,|z|^2 + z \\ &\Leftrightarrow \quad z + \overline{z} = \overline{z} + z \qquad \text{car } z \in \mathbb{U} \text{ i.e. } |z| = 1. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant vraie, on en conclut que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, \qquad f(z) \in \mathbb{R}.}$$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) &= \frac{\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2 + 1}{2\,\mathrm{e}^{i\theta}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2i\theta} + 1}{2\,\mathrm{e}^{i\theta}} \\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{2i\theta} + 1\right)\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \\ &= \cos(\theta) \qquad \text{par la formule d'Euler.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \cos(\theta).}$$

(c) On procède comme indiqué par double inclusion. Montrons que $f(\mathbb{U}) \subset [-1;1]$. Soit $z \in f(\mathbb{U})$. Par définition, il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que $z = f(u)$. Puisque $u \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{e}^{i\theta}$. Donc par la question précédente,

$$z = f(u) = f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \cos(\theta).$$

En particulier,

$$z = \cos(\theta) \in [-1;1].$$

On a donc établi que pour tout $x \in f(\mathbb{U})$, $z \in [-1;1]$. Par conséquent,

$$f(\mathbb{U}) \subset [-1;1].$$

Réciproquement, soit $x \in [-1;1]$. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ (en posant $\theta = \arccos(x)$ par exemple). Donc par la question précédente,

$$x = \cos(\theta) = f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right).$$

Posons $u = \mathrm{e}^{i\theta}$. Alors $u \in \mathbb{U}$ et par suite, $f(u) \in f(\mathbb{U})$. Ainsi,

$$x = f(u) \in f(\mathbb{U}).$$

Finalement, pour tout $x \in [-1;1]$, on a $x \in f(\mathbb{U})$ et donc

$$[-1;1] \subset f(\mathbb{U}).$$

Conclusion, par double inclusion,

$$\boxed{f(\mathbb{U}) = [-1;1].}$$

4. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in f^{\leftarrow}(i\mathbb{R}) &\Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow f(z) = -\overline{f(z)} \\
&\Leftrightarrow \frac{z^2+\alpha}{2z} = -\frac{\overline{z}^2+\alpha}{2\overline{z}} && \text{car } \overline{\alpha} = \alpha \text{ car } \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \left(z^2+\alpha\right)2\overline{z} = -2z\left(\overline{z}^2+\alpha\right) && \text{car } z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 2z\,|z|^2 + 2\alpha\overline{z} = -2\overline{z}\,|z|^2 - 2z\alpha \\
&\Leftrightarrow z\,|z|^2 + \alpha\overline{z} = -\overline{z}\,|z|^2 - z\alpha \\
&\Leftrightarrow |z|^2(z+\overline{z}) + \alpha(z+\overline{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(|z|^2+\alpha\right)(z+\overline{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow z+\overline{z} = 0 && \text{car } |z|^2 \geqslant 0 \text{ et } \alpha > 0 \text{ donc } |z|^2+\alpha > 0 \\
&\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 0 \\
&\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \setminus \{0\}\,.}$$

Partie 2 : Etude d'une suite complexe

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. On pose alors $\alpha = \beta^2$ et on note

$$\mathcal{P}_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0 \right\}.$$

5. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$.

   (a) On sait que $z \notin i\mathbb{R}$, donc $\boxed{z \neq 0}$ et

   $$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

   Conclusion, la forme algébrique de $1/z$ est donnée par

   $$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.}$$

   (b) Par définition, $\mathrm{Re}(z) = a$ et par la question précédente, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}$. Ainsi,

   $$\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

   Donc $\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geqslant 0$. Montrons que $\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0$. Procédons par l'absurde, supposons $\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ i.e. $\frac{a^2}{a^2+b^2} = 0$ et donc nécessairement $a = 0$ ou encore $z = ib \in i\mathbb{R}$, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Conclusion,

   $$\boxed{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0.}$$

6. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z}{\beta} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Posons $z' = \frac{z}{\beta}$. Puisque $z' \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, par la question précédente,

$$\mathrm{Re}(z')\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z'}\right) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{z}\right) > 0.$$

Or, par définition de α, $\frac{\alpha}{\beta z} = \frac{\beta^2}{\beta z} = \frac{\beta}{z}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z}\right) > 0.}$$

7. Montrons que $f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+$. Soit $z \in f(\mathcal{P}_+)$. Montrons que $z \in \mathcal{P}_+$. Par définition, il existe $z_1 \in \mathcal{P}_+$ tel que $z = f(z_1)$. Puisque $z_1 \in \mathcal{P}_+$, on a $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) > 0$. Nécessairement, $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) \neq 0$ et donc $\frac{z_1}{\beta} \notin i\mathbb{R}$. Par la question précédente,
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z_1}\right) > 0.$$
Comme $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) > 0$, on obtient
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z_1}\right) > 0.$$
On veut montrer que $z \in \mathcal{P}_+$ i.e. $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0$. On a
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{f(z_1)}{\beta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1^2+\alpha}{2z_1\beta}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{z_1\beta}\right).$$
Or, on a vu précédemment que $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) > 0$ et que $\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z_1}\right) > 0$. D'où,
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0.$$
Ou encore $z \in \mathcal{P}_+$. Donc on a montré que pour tout $z \in f(\mathcal{P}_+)$, $z \in \mathcal{P}_+$. Conclusion,
$$\boxed{f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+.}$$

On fixe $z_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$z_{n+1} = f(z_n) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta}.$$

8. On procède par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } z_n \text{ existe et } z_n \in \mathcal{P}_+ \text{ »}$$
Initialisation. Si $n = 0$, par définition, $z_0 = \alpha$. Donc z_0 existe. Montrons que $\alpha \in \mathcal{P}_+$. On a,
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\beta^2}{\beta}\right) = \mathrm{Re}(\beta) > 0 \qquad \text{par hypothèse.}$$
Donc $z_0 = \alpha \in \mathcal{P}_+$ et ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, z_n existe et $z_n \in \mathcal{P}_+$. Donc $\mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{\beta}\right) > 0$. Nécessairement, $\frac{z_n}{\beta} \neq 0$ ou encore $z_n \neq 0$. Donc $z_{n+1} = f(z_n)$ existe. De plus, $z_n \in \mathcal{P}_+$. Donc, par la question 7.,
$$z_{n+1} = f(z_n) \in f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+,$$
ce qui démontre $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n \text{ existe et } z_n \in \mathcal{P}_+.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z_n \in \mathcal{P}_+$, on a $\mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{\beta}\right) > 0$. Supposons $z_n + \beta = 0$. Alors $z_n = -\beta$ et par suite, $\mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{\beta}\right) = \mathrm{Re}\,(-1) = -1 < 0$, contradiction. Donc $z_n + \beta \neq 0$. Ainsi, $w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta}$ existe. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n \text{ existe.}}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{z_{n+1} - \beta}{z_{n+1} + \beta} \\ &= \frac{f(z_n) - \beta}{f(z_n) + \beta} \\ &= \frac{\frac{z_n^2 + \alpha}{2z_n} - \beta}{\frac{z_n^2 + \alpha}{2z_n} + \beta} \\ &= \frac{z_n^2 - 2z_n\beta + \alpha}{z_n^2 + 2z_n\beta + \alpha} \\ &= \frac{z_n^2 - 2z_n\beta + \beta^2}{z_n^2 + 2z_n\beta + \beta^2} \\ &= \frac{(z_n - \beta)^2}{(z_n + \beta)^2} \\ &= w_n^2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} = (w_n)^2.}$$

11. Par la question précédente, on a $w_1 = w_0^2$, puis $w_2 = w_1^2 = \left(w_0^2\right)^2 = w_0^4$, $w_3 = \left(w_0^4\right)^2 = w_0^8$. Par récurrence, on montre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = w_0^{2^n}.}$$

12. (a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |\beta - 1|^2 < |\beta + 1|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad |\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\beta\bar{1}\right) + 1 < |\beta|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\beta\bar{1}\right) + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 4\mathrm{Re}\,(\beta) > 0. \end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie par hypothèse. Conclusion,

$$\boxed{|\beta - 1|^2 < |\beta + 1|^2.}$$

(b) Par définition,

$$|w_0| = \left|\frac{z_0 - \beta}{z_0 + \beta}\right| = \left|\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right| = \left|\frac{\beta^2 - \beta}{\beta^2 + \beta}\right| = \left|\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right|. \qquad \text{car } \beta \neq 0 \text{ car } \mathrm{Re}\,(\beta) > 0$$

Or par la question précédente, $|\beta - 1|^2 < |\beta + 1|^2$ i.e. par la stricte croissante de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $|\beta - 1| < |\beta + 1|$. Ainsi,

$$|w_0| = \left|\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right| < 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{|w_0| < 1.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la strict croissance de la fonction $x \mapsto x^{2^n}$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de la question précédente que

$$|w_0|^{2^n} < 1^{2^n} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|w_0^{2^n}\right| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |w_n| < 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |w_n| < 1.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta} \quad &\Leftrightarrow \quad w_n\left(z_n + \beta\right) = z_n - \beta \qquad \text{car on a vu que } z_n + \beta \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z_n\left(w_n - 1\right) = -\beta - w_n\beta. \end{aligned}$$

Par la question précédente, $|w_n| < 1$ donc $w_n \neq 1$. Ainsi,

$$z_n = \frac{-\beta - w_n\beta}{w_n - 1} = \beta\frac{1 + w_n}{1 - w_n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \beta\frac{1 + w_n}{1 - w_n}.}$$

14. On rappelle que pour $q \in \mathbb{C}$, si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. On a vu que $|w_0| < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$. Donc par composée de limites,

$$\lim_{n \to +\infty} w_0^{2^n} = \lim_{p \to +\infty} w_0^p = 0.$$

Donc par la question précédente, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \lim_{n \to +\infty} \beta\frac{1 + w_n}{1 - w_n} = \beta.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} z_n = \beta.}$$

En construisant ainsi récursivement $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $z_{n+1} = f\left(z_n\right)$, on construit une suite qui converge vers une racine carrée de α.

Problème III - Calcul algébrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

On se propose de calculer S_n par deux méthodes.

Partie 1 : Méthode 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose également

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k\binom{n}{k}.$$

1. Préciser S_0, S_1, S_2 et S_3. On a les égalités entre réels suivantes :
$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k+1}\binom{0}{k} = \frac{1}{1} \times 1 = 1.$$
Puis,
$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k+1}\binom{1}{k} = 1 \times \binom{1}{0} + \frac{1}{2}\binom{1}{1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$
De même,
$$S_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k+1}\binom{2}{k} = 1 \times \binom{2}{0} + \frac{1}{2}\binom{2}{1} + \frac{1}{3}\binom{2}{2} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$
Enfin,
$$S_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k+1}\binom{3}{k} = 1 \times \binom{3}{0} + \frac{1}{2}\binom{3}{1} + \frac{1}{3}\binom{3}{2} + \frac{1}{4}\binom{3}{3} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$
Conclusion,
$$\boxed{S_0 = 1, \quad S_1 = \frac{3}{2}, \quad S_2 = \frac{7}{3}, \quad S_3 = \frac{15}{4}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculons $f_n(x)$. On reconnaît un binôme de Newton, on a donc
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k} = f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (x+1)^n.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = (x+1)^n.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons une primitive de f_n sur $\mathbb{R}$. Par la question précédente, on observe directement que
$$\boxed{F_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \end{array}}$$
est une primitive de f_n sur $\mathbb{R}$.

4. Déduisons-en qu'il existe $K_n \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} + K_n.$$
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}.$$
Dès lors, une autre primitive de f_n sur $\mathbb{R}$ est donnée par
$$G_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} \end{array}$$
Or deux primitives d'une même fonction sont égales à une constante près. Ainsi, il existe $K_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = F_n(x) + K_n$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} + K_n.}$$

5. Déterminons la valeur de K_n. Puisque l'égalité précédente est vraie sur $\mathbb{R}$, en prenant $x = 0$ en particulier, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{0}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(1)^{n+1}}{n+1} + K_n \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{n+1} + K_n \quad \Leftrightarrow \quad K_n = -\frac{1}{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{K_n = -\frac{1}{n+1}.}$$

6. Déduisons-en le calcul de S_n. Par les deux questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

En particulier, pour $x = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(2)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$$

7. Vérifions la cohérence de notre résultat avec la question 1. Si l'on prend $n = 0$, 1, 2 et 3 dans la question précédente, on obtient,

$$S_0 = \frac{2^1-1}{1} = 1, \quad S_1 = \frac{2^2-1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_2 = \frac{2^3-1}{3} = \frac{7}{3}, \quad S_3 = \frac{2^4-1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{cela est cohérent avec la question 1.}}$$

Partie 2 : Méthode 2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

8. Montrons que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-k-1)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![0;n]\!], \quad \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.}$$

9. Retrouvons alors la valeur S_n. Par définition,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} \qquad \text{car } \frac{1}{n+1} \text{ est indépendant de } k. \end{aligned}$$

Posons $\tilde{k} = k+1$ i.e. $k = \tilde{k} - 1$. Si $k = 0$, alors $\tilde{k} = 1$, si $k = n$, alors $\tilde{k} = n+1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{\tilde{k}=1}^{n+1}\binom{n+1}{\tilde{k}} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} \qquad \text{car l'indice est muet} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - 1\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left((1+1)^{n+1} - 1\right) \qquad \text{car on reconnait un binôme de Newton} \\ &= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$$

10. Déduisons-en le calcul de $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}$. Effectuons l'inversion d'indice $\tilde{k} = n-k$ i.e. $k = n - \tilde{k}$. Si $k = 0$, $\tilde{k} = n$ et si $k = n$, $\tilde{k} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \frac{1}{\tilde{k}+1}\binom{n}{n-\tilde{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{n-k} \qquad \text{car l'indice de sommation est muet} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \qquad \text{par propriété du coefficient binomial} \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Conclusion, par ce qui précède,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = S_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$$

Partie 3 : La série harmonique

On s'intéresse maintenant à la somme suivante : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

11. Calculons H_1, H_2, H_3 et H_4. On a

$$H_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1.$$

De même,

$$H_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Puis,

$$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

Enfin,

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22+3}{12} = \frac{25}{12}.$$

Conclusion,

$$\boxed{H_1 = 1, \quad H_2 = \frac{3}{2}, \quad H_3 = \frac{11}{6}, \quad H_4 = \frac{25}{12}.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimons H_{n+1} en fonction de H_n. Par définition, on a

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\ &= H_n + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}.}$$

13. Déduisons-en que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} > 0$. Donc par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} > H_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

14. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Ecrivons $H_{2p} - H_p$ sous la forme d'une unique somme. Par définition,

$$\begin{aligned} H_{2p} - H_p &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad H_{2p} - H_p = \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k}.}$$

15. A l'aide d'un encadrement de $\frac{1}{k}$, montrons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leqslant H_{2p} - H_p \leqslant 1$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![p; 2p]\!]$, on a
$$\frac{1}{2p} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{p}.$$
En sommant entre p et $2p$:
$$\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{2p} \leqslant \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{p}.$$
Or $\frac{1}{2p}$ et $\frac{1}{p}$ ne dépendent pas du compteur donc :
$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \sum_{k=p+1}^{2p} 1 \leqslant H_{2p} - H_p \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=p+1}^{2p} 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2p}(2p - p - 1 + 1) \leqslant H_{2p} - H_p \leqslant \frac{1}{p}(2p - p - 1 + 1) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant H_{2p} - H_p \leqslant 1. \end{aligned}$$
Conclusion, on obtient bien que
$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} \leqslant H_{2p} - H_p \leqslant 1.}$$

16. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2} + 1$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathscr{P}(n) : \quad « \; H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2} + 1 \; ».$$
Initialisation. Si $n = 0$, on a $H_{2^n} = H_{2^0} = H_1 = 1$ et $\frac{n}{2} + 1 = 1$. Donc $H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2} + 1$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. i.e. $H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}+1$ et démontrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi. En posant $p = 2^n$, par la question précédente,
$$H_{2^{n+1}} = H_{2 \times 2^n} = H_{2p} \geqslant H_p + \frac{1}{2} = H_{2^n} + \frac{1}{2}.$$
Donc par l'hypothèse de récurrence,
$$H_{2^{n+1}} \geqslant \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2} + 1.$$
D'où $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. *Conclusion,* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2} + 1.}$$

Partie 4 : Avec une décomposition en éléments simples

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$.

17. Déterminons a et b deux réels tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}$. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2) + b(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b)k + 2a + b}{(k+1)(k+2)}.$$
Pour que $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}$ on note alors **qu'il suffit** d'avoir
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -a = -1. \end{cases}$$

Conclusion, pour $a = 1$ et $b = -1$, on a

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.}$$

18. Déduisons-en pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente,

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right).$$

On reconnait une somme télescopique donc

$$U_n = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.}$$

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $V_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{k+1} - \frac{H_{k+1}}{k+2} \right) + U_n$. Par la question 17.

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} H_k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{k+1} - \frac{H_k}{k+2} \right). \end{aligned}$$

Or par la question 12. $H_k = H_{k+1} - \frac{1}{k+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{k+1} - \frac{H_{k+1}}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{k+1} - \frac{H_{k+1}}{k+2} \right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{k+1} - \frac{H_{k+1}}{k+2} \right) + U_n. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{k+1} - \frac{H_{k+1}}{k+2} \right) + U_n.}$$

20. Déduisons-en une expression de V_n en fonction de H_{n+1}. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente et la question 18.

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{k+1} - \frac{H_{k+1}}{k+2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

On reconnait une somme télescopique :

$$\begin{aligned} V_n &= frac H_1 1 + 1 - \frac{H_{n+1}}{n+2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{H_{n+1}}{n+2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1 + H_{n+1}}{n+2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = 1 - \frac{1 + H_{n+1}}{n+2}.}$$

Partie 5 : Dans deux sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}$.

21. (a) Ecrivons $\sum_{k=1}^{n} H_k$ comme une somme double. Par définition de H_k,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{i}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{i}.}$$

(b) En intervertissant l'ordre de sommation, déduisons-en que $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1) H_n - n$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{i} \qquad \text{car } \frac{1}{i} \text{ ne dépend pas du compteur interne } k \\ &= (n+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= (n+1) H_n - n. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1) H_n - n.}$$

(a) On suppose $n \geqslant 2$ et on fixe $i \in [\![1; n-1]\!]$. Montrons que $\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} = H_m$ où m est un entier que l'on précisera. Effectuons le glissement d'indice $\tilde{j} = j - i$ i.e. $j = \tilde{j} + i$. Si $j = i + 1$, alors $\tilde{j} = 1$ et si $j = n$, alors $\tilde{j} = n - i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} &= \sum_{\tilde{j}=1}^{n-i} \frac{1}{\tilde{j}} \\ &= \sum_{j=1}^{n-i} \frac{1}{j} \qquad \text{car l'indice de sommation est muet} \\ &= H_{n-i}. \end{aligned}$$

Conclusion, avec $m = n - i$,

$$\boxed{\forall i \in [\![1; n-1]\!], \quad \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} = H_{n-i}.}$$

(b) Déduisons-en que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = n\,(H_n - 1)$. On est en présence d'une somme double triangulaire, alors

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i}.$$

Par la question précédente,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = \sum_{i=1}^{n-1} H_{n-i}.$$

Posons $\tilde{i} = n - i$ i.e. $i = n - \tilde{i}$. Si $i = 1$, $\tilde{i} = n - 1$ et si $i = n-1$, alors $\tilde{i} = 1$. Ainsi,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = \sum_{\tilde{i}=1}^{n-1} H_{\tilde{i}} = \sum_{k=1}^{n-1} H_k \quad \text{car l'indice de sommation est muet.}$$

Par la question 21.b comme $n \geqslant 2$, $n - 1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = (n-1+1)\,H_{n-1} - (n-1) = nH_{n-1} - n + 1.$$

Or par la question 12. $H_{n-1} = H_n - \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = n\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - n + 1 = nH_n - 1 - n + 1 = nH_n - n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = n\,(H_n - 1)\,.}$$

Partie 6 : Avec des coefficients binomiaux

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in [\![0; n]\!]$, $B_{n,m} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k$.

22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« } \forall m \in [\![0; n]\!], \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \text{ »}$$

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On procède par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(0) : \quad \text{« } \forall m \in [\![0; 0]\!], \sum_{k=0}^{0} \binom{k}{m} = \binom{1}{m+1} \text{ »} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{« } \binom{0}{0} = \binom{1}{1} \text{ »} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{« } 1 = 1 \text{ » toujours vraie.}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. $\forall m \in [\![0;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$. Démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit $m \in [\![0;n+1]\!]$. On calcule :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} + \binom{n+1}{m}.$$

Si $m = n+1$, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\binom{k}{m} = \binom{k}{n+1} = 0$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{m} = 0 + \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

D'autre part, $\binom{n+2}{m+1} = \binom{n+2}{n+2} = 1$. Donc si $m = n+1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{m} = \binom{n+2}{m+1}.$$

Supposons maintenant que $m \in [\![0;n]\!]$. Alors par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{m} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \\ &= \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} \\ &= \binom{n+2}{m+1} \qquad \text{par la formule de Pascal.}\end{aligned}$$

Dans tous les cas,

$$\forall m \in [\![0;n+1]\!], \quad \sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{m} = \binom{n+2}{m+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in [\![0;n]\!], \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.}$$

23. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![0;n]\!]$. A l'aide de la question 8. calculons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{i}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}$.

D'après la question 8. pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, en posant $\tilde{n} = i-1 \in [\![0;n-1]\!]$, i.e. $i = \tilde{n}+1$, et $k = m$ on a

$$\frac{1}{i}\binom{i}{m+1} = \frac{1}{\tilde{n}+1}\binom{\tilde{n}+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{\tilde{n}}{k} = \frac{1}{m+1}\binom{i-1}{m}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{i}{m+1} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m+1}\binom{i-1}{m} \\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n}\binom{i-1}{m}.\end{aligned}$$

Posons $k = i - 1$ i.e. $i = k + 1$. Si $i = 1$, $k = 0$ et si $i = n$, $k = n - 1$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\binom{i}{m+1} = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{m}.$$

Donc par la question précédente, si $m \in [\![0; n-1]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\binom{i}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}.$$

Si $m = n$, alors pour tout $k = [\![0; n-1]\!]$, $\binom{k}{m} = 0$ et $\binom{n}{m+1} = 0$. Donc l'égalité précédente reste vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in [\![0; n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\binom{i}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}.}$$

24. Ecrivons $B_{n,m}$ sous la forme d'une somme double. Par définition,

$$\begin{aligned} B_{n,m} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}H_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{i}\binom{k}{m}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{B_{n,m} = \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{i}\binom{k}{m}.}$$

25. Déduisons des questions précédentes que $B_{n,m} = \binom{n+1}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}$. Par la question 24.

$$\begin{aligned} B_{n,m} &= \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{i}\binom{k}{m} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{i}\binom{k}{m} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{m} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} - \sum_{k=0}^{i-1}\binom{k}{m}\right) \end{aligned}$$

Par la question 22. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$. car $m \in [\![0; n]\!]$. Si $m \in [\![0; i-1]\!]$, on a aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{i-1}\binom{k}{m} =$

$\binom{i}{m+1}$ et si $m \geqslant i$, $\sum_{k=0}^{i-1}\binom{k}{m} = 0 = \binom{i}{m+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
B_{n,m} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\left(\binom{n+1}{m+1} - \binom{i}{m+1}\right)\\
&= \binom{n+1}{m+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{i}{m+1}\\
&= \binom{n+1}{m+1}H_n - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{i}{m+1}.
\end{aligned}$$

Par la question 23. on en conclut que

$$\boxed{B_{n,m} = \binom{n+1}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}.}$$

26. Concluons que $B_{n,m} = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right)$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
B_{n,m} &= \binom{n+1}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}\\
&= \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}\\
&= \binom{n+1}{m+1}H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}.
\end{aligned}$$

Or par la question 8. $\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{n}{m}$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{m+1} + \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1} &= \frac{1}{m+1}\binom{n}{m} + \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}\\
&= \frac{1}{m+1}\left(\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1} \qquad \text{par la formule de Pascal.}
\end{aligned}$$

D'où,

$$B_{n,m} = \binom{n+1}{m+1}H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in [\![0;n]\!], \quad B_{n,m} = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right).}$$