Correction de l'interrogation 0
Révisions de calculs

1. Simplifier $A = \dfrac{\frac{13}{5} - \frac{2}{13}}{\frac{\frac{4}{7} + \frac{5}{3} + \frac{59}{21}}{1 - \frac{7}{9}}}$.

   Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$A = \frac{\frac{13}{5} - \frac{2}{13}}{\frac{\frac{4}{7} + \frac{5}{3} + \frac{59}{21}}{1 - \frac{7}{9}}} = \frac{\frac{169-10}{5\times13}}{\frac{\frac{12+35+59}{21}}{\frac{2}{9}}} = \frac{\frac{159}{5\times13}}{\frac{106}{21} \times \frac{9}{2}} = \frac{\frac{159}{5\times13}}{\frac{53}{7} \times 3} = \frac{3 \times 53 \times 7}{53 \times 3 \times 5 \times 13} = \frac{7}{5 \times 13}$$

   Conclusion,

$$\boxed{A = \frac{7}{65}.}$$

2. Simplifier $B = \dfrac{3^{10} \times 7^3 - 9^5 \times 49^2}{(27 \times 7)^3 + 3^9 \times 14^3}$.

   Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} B &= \frac{3^{10} \times 7^3 - 9^5 \times 49^2}{(27 \times 7)^3 + 3^9 \times 14^3} \\ &= \frac{3^{10} \times 7^3 - \left(3^2\right)^5 \times \left(7^2\right)^2}{(3^3 \times 7)^3 + 3^9 \times 7^3 \times 2^3} \\ &= \frac{3^{10} \times 7^3 - 3^{10} \times 7^4}{3^9 \times 7^3 + 3^9 \times 7^3 \times 2^3} \\ &= \frac{3^{10} \times 7^3 (1 - 7)}{3^9 \times 7^3 (1 + 2^3)} \\ &= \frac{3 \times (-6)}{9} \\ &= -2. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{B = -2.}$$

3. Simplifier $C = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$.

   Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} C &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{10} - 2 + 5 - \sqrt{10} + \sqrt{15} - \sqrt{6}}{5 - 2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{15} - \sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{C = \frac{3 + \sqrt{15} - \sqrt{6}}{3}.}$$

4. Simplifier $D = \sqrt{\dfrac{135^{3/2} \times 5^{3/2} \times \sqrt{3}^9}{3 \times 27^2}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{\frac{(5\times 27)^{3/2}\times 5^{3/2}\times 3^{9/2}}{3\times (3^3)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{(5\times 3^3)^{3/2}\times 5^{3/2}\times 3^{9/2}}{3^7}}\\
&= \sqrt{\frac{5^{3/2}\times 3^{9/2}\times 5^{3/2}\times 3^{9/2}}{3^7}}\\
&= \sqrt{\frac{5^3\times 3^9}{3^7}}\\
&= \sqrt{5^3\times 3^2}\\
&= 5\times 3\times \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D = 15\sqrt{5}.}$$

5. Simplifier $E = \frac{12\ln(\sqrt{2}+1)+7\ln(\sqrt{2}-1)-\ln(16\sqrt{2}+16)}{4\ln(2)}$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
E &= \frac{12\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-\ln\left(16\sqrt{2}+16\right)}{4\ln(2)}\\
&= \frac{5\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-\ln\left(16\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}{4\ln(2)}\\
&= \frac{5\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right]-\ln(16)-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{4\ln(2)}\\
&= \frac{5\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln(2-1)-\ln\left(2^4\right)-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{4\ln(2)}\\
&= \frac{4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln(1)-4\ln(2)}{4\ln(2)}\\
&= \frac{4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-4\ln(2)}{4\ln(2)}\\
&= \frac{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\ln(2)}{\ln(2)}\\
&= \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}{\ln(2)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{E = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}{\ln(2)}.}$$

6. Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier et mettre sous forme factorisée $F = \frac{\mathrm{e}^{4x}+2\,\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x)^2}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}+2\,\mathrm{e}^{x}+1\right)}{\mathrm{e}^{2x}} && = \mathrm{e}^{2x}+2\,\mathrm{e}^{x}+1\\
&= (\mathrm{e}^x)^2+2\,\mathrm{e}^x+1\\
&= (\mathrm{e}^x+1)^2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F = (\mathrm{e}^x+1)^2.}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $G = \left((x-1)^2+2\right)^2$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$G = \left(x^2-2x+1+2\right)^2 = \left(x^2-2x+3\right)^2 = x^4+4x^2+9-4x^3+6x^2-12x = x^4-4x^3+10x^2-12x+9.$$

Conclusion,

$$\boxed{G = x^4-4x^3+10x^2-12x+9.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum $H = (2x+1)(x-14)-6x-3+(10x+5)(3-x)$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} H &= (2x+1)(x-14)-6x-3+(10x+5)(3-x) \\ &= (2x+1)(x-14)-3(2x+1)+5(2x+1)(3-x) \\ &= (2x+1)(x-14-3+5(3-x)) \\ &= (2x+1)(x-14-3+15-5x) \\ &= (2x+1)(-4x-2) \\ &= -2(2x+1)(2x+1). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{H = -2(2x+1)^2.}$$

9. Déterminer $\mathcal{D}'_I$ le domaine de dérivabilité et dériver la fonction $I : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-3)(4-x)}$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}'_I \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-1>0 \\ (x-3)(4-x) \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2>1 \\ x-3 \neq 0 \\ 4-x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>1 \quad \text{OU} \quad x<-1 \\ x \neq 3 \\ x \neq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{D}'_I =]-\infty;-1[\cup]1;3[\cup]3;4[\cup]4;+\infty[.}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}'_I, \quad I'(x) &= \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'(x-3)(4-x)-\sqrt{x^2-1}\,[(x-3)(4-x)]'}{(x-3)^2(4-x)^2} \\ &= \frac{\frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}(x-3)(4-x)-\sqrt{x^2-1}\left[(x-3)'(4-x)+(x-3)(4-x)'\right]}{(x-3)^2(4-x)^2} \\ &= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}(x-3)(4-x)-\sqrt{x^2-1}\,[(4-x)-(x-3)]}{(x-3)^2(4-x)^2} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x-3)(4-x)-\sqrt{x^2-1}\,[7-2x]}{(x-3)^2(4-x)^2} \\ &= \frac{x(x-3)(4-x)-\left(x^2-1\right)(7-2x)}{\sqrt{x^2-1}\,(x-3)^2(4-x)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}'_I \quad I'(x) = \frac{x(x-3)(4-x)-\left(x^2-1\right)(7-2x)}{\sqrt{x^2-1}\,(x-3)^2(4-x)^2}.}$$

10. Déterminer $\mathcal{D}'_J$ le domaine de dérivabilité et dériver la fonction $J : x \mapsto x^2 \sin\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)$.
Solution. Soit Δ le discriminant de x^2+x+1. On a $\Delta = 1-4 = -3 < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$. Donc la fonction J est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{D}'_J = \mathbb{R}.}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad J'(x) &= \left(x^2\right)' \sin\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right) + x^2\left(\sin\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\right)' \\ &= 2x \sin\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right) + x^2\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)' \cos\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right) \\ &= 2x \sin\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right) + x^2 \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1} \cos\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right) \\ &= 2x \sin\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right) + x^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1} \cos\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad J'(x) = 2x \sin\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right) + \frac{x^2\left(2x+1\right)}{x^2+x+1} \cos\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right).}$$