Correction de l'interrogation 01
Logique et raisonnement

1. (a) Définir logiquement une implication.
Solution. Soient P et Q deux assertions. L'implication $P \Rightarrow Q$ est donnée par
$$\overline{P} \text{ OU } Q.$$
(b) Compléter le plus précisément possible avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1.1 $\boxed{(\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v) \ \Leftarrow \ (u \geqslant v \geqslant 0)}$. En effet, si $u \geqslant v$, alors par croissance de la fonction exponentielle, on a $\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v$. D'où l'implication réciproque. L'implication directe est fausse à cause de la condition de positivité : si $u = -1$ et $v = -2$, on a bien $\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v$ et $u \geqslant v$ mais $v \geqslant 0$ est fausse. Donc pour $(u,v) = (-1,-2)$, on a $(\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v)$ ET $(v < 0)$ ce qui démontre que l'implication est fausse en général.

1.2 $\boxed{\left(\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}\right) \ \times \ (a \leqslant b)}$. En effet, pour $a = 1$ et $b = -1$ par exemple, on a $\frac{1}{a} = \frac{1}{1} = 1 \geqslant \frac{1}{-1} = -1 = \frac{1}{b}$ et pourtant $a = 1 > -1 = b$. Donc l'implication directe est fausse. De même, pour $a = -1$ et $b = 1$, on a bien $a = -1 \leqslant 1 = b$ et pourtant $\frac{1}{a} = -1 < 1 = \frac{1}{b}$. Donc l'implication réciproque est aussi fausse.

1.3 $\boxed{(f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}) \ \Rightarrow \ (\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y)))}$. En effet, si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors pour $y \in \mathbb{R}$, (on peut prendre $y = 1$ ou 12, en réalité peu importe, cela est vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors par la stricte croissance de f, $f(x) < f(y)$. La réciproque est fausse en général. Par exemple posons $f : x \mapsto -x^2$. Alors pour $y = 0$, on observe que si $x < 0$, on a bien $f(x) = -x^2 < 0 = f(0)$. Cela montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ mais f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par exemple $-1 < 2$ et pourtant on a $f(-1) = -1 > -4 = f(2)$. Donc l'implication réciproque est fausse. Pour avoir la réciproque, il aurait fallu donner la définition exacte de la stricte croissance qui est :
$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$$

1.4 $\boxed{(\ln(|x|) \geqslant 0) \quad \Leftrightarrow \quad ((x \geqslant 1) \text{ OU } (x \leqslant -1))}$. En effet, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \ln(|x|) \geqslant 0 &\Leftrightarrow |x| \geqslant 1 && \text{par croissance de la fonction logarithme sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ OU } -x \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ OU } x \leqslant -1. \end{aligned}$$

2. Soient $(n,m,p) \in \mathbb{Z}^3$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :
$$(n \text{ divise } m) \text{ ET } (m \text{ divise } p) \quad \Rightarrow \quad n \text{ divise } p.$$
Solution. La réciproque est
$$\boxed{n \text{ divise } p \quad \Rightarrow \quad (n \text{ divise } m) \text{ ET } (m \text{ divise } p).}$$
La contraposée est
$$\boxed{n \text{ ne divise pas } p \quad \Rightarrow \quad (n \text{ ne divise pas } m) \text{ OU } (m \text{ ne divise pas } p).}$$
La négation est
$$\boxed{(n \text{ divise } m) \text{ ET } (m \text{ divise } p) \text{ ET } (n \text{ ne divise pas } p).}$$

3. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire en une assertion mathématique le fait que la fonction f est constante sur les entiers relatifs, puis nier cette assertion.
Solution. L'assertion cherchée est
$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) = C.}$$
La négation est donc
$$\boxed{\forall C \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) \neq C.}$$

4. On fixe $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
Solution. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \, u_n = 3^n - 2^n \, ».$$
Procédons par récurrence une récurrence double.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = 0$ et $3^n - 2^n = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$. Donc $u_0 = 3^0 - 2^0$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Si $n = 1$, alors $u_1 = 1$ et $3^n - 2^n = 3 - 2 = 1$ donc $u_1 = 3^1 - 2^1$ et $\mathscr{P}(1)$ est aussi vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\mathscr{P}(n) \text{ ET } \mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies donc on a $u_n = 3^n - 2^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Montrons $\mathscr{P}(n+2)$. Par construction puis les hypothèses de récurrence,
$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) - 6\left(3^n - 2^n\right) = 3^n(15-6) + (-10+6)2^n = 9 \times 3^n - 4 \times 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}.$$
Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est bien vérifiée.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on a bien
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n - 2^n.}$$

5. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x+1} = 3x - 1$.
Solution. **Méthode 1 - Analyse-Synthèse.** Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x+1} = 3x - 1$. Alors
$$x + 1 = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 - 7x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ OU } 9x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ OU } x = \frac{7}{9}.$$
Synthèse. Si $x = 0$, alors $\sqrt{x+1} = 1$ et $3x - 1 = -1 \neq 1$. Donc $x = 0$ n'est pas une solution.
Si $x = \frac{7}{9}$, alors $\sqrt{x+1} = \sqrt{1 + \frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$. De plus, $3x - 1 = 3 \times \frac{7}{9} - 1 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$. Donc $x = \frac{7}{9}$ est une solution. Conclusion,
$$\boxed{\sqrt{x+1} = 3x - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{7}{9}.}$$
Méthode 2 - par équivalences. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} = 3x - 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ 3x - 1 \geqslant 0 \\ x + 1 = (3x-1)^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ 3x - 1 \geqslant 0 \\ x + 1 = (3x-1)^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \geqslant \frac{1}{3} \\ x + 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 7x = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{3} \\ 9x - 7 = 0 \end{cases} \qquad \text{car } x \neq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{9} \geqslant \frac{3}{9}.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\sqrt{x+1} = 3x - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{7}{9}.}$$