Réponses de l'interrogation 01
Logique et raisonnement

1. (a) Définir logiquement une implication.
   Solution. Soient P et Q deux assertions. L'implication $P \Rightarrow Q$ est donnée par
   $$\overline{P} \text{ OU } Q.$$
   (b) Compléter le plus précisément possible avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   1.1 $\boxed{(\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v) \ \Leftarrow\ (u \geqslant v \geqslant 0)}$.
   1.2 $\boxed{\left(\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}\right) \ \times\ (a \leqslant b)}$.
   1.3 $\boxed{(f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad (\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x < y) \ \Rightarrow\ (f(x) < f(y)))}$.
   1.4 $\boxed{(\ln(|x|) \geqslant 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad ((x \geqslant 1) \ \text{ OU } \ (x \leqslant -1))}$.
2. Soient $(n,m,p) \in \mathbb{Z}^3$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :
   $$(n \text{ divise } m) \ \text{ ET } \ (m \text{ divise } p) \quad \Rightarrow \quad n \text{ divise } p.$$
   Solution. La réciproque est
   $$\boxed{n \text{ divise } p \quad \Rightarrow \quad (n \text{ divise } m) \ \text{ ET } \ (m \text{ divise } p).}$$
   La contraposée est
   $$\boxed{n \text{ ne divise pas } p \quad \Rightarrow \quad (n \text{ ne divise pas } m) \ \text{ OU } \ (m \text{ ne divise pas } p).}$$
   La négation est
   $$\boxed{(n \text{ divise } m) \quad \text{ET} \quad (m \text{ divise } p) \quad \text{ET} \quad (n \text{ ne divise pas } p).}$$
3. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire en une assertion mathématique le fait que la fonction f est constante sur les entiers relatifs, puis nier cette assertion.
   Solution. L'assertion cherchée est
   $$\boxed{\exists C \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) = C.}$$
   La négation est donc
   $$\boxed{\forall C \in \mathbb{R},\ \exists p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) \neq C.}$$
4. On fixe $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
   Solution. Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et on a bien
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n - 2^n.}$$
5. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x+1} = 3x - 1$.
   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{\sqrt{x+1} = 3x - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{7}{9}.}$$