

Correction de l'interrogation 02

Fonctions réelles

1. (a) Comment obtient-on le graphe de $g_1 : x \mapsto f(x) + a$?

Solution. A partir du graphe de f , on obtient le graphe de g_1 par une translation de vecteur $a\vec{j}$.

- (b) Définir une fonction paire. Que dire de son graphe ?

Solution. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. La fonction f est paire si

- U est centré en 0,
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

Le graphe de f est alors symétrique par rapport à (Oy) .

2. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(\sqrt{x^2-4})}{e^{2x}-e^{-2x}}$. Déterminer le domaine de définition de f puis déterminer sa parité.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} > 0 \\ e^{2x} - e^{-2x} \neq 0 \end{cases}$$

Or

$$e^{2x} - e^{-2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Ainsi,

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 > 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 2 \text{ OU } x < -2 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Ainsi, le domaine de définition de f est

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

On a les points suivants :

- $\mathcal{D}_f$ est centré en 0.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(-x) = \frac{\ln(\sqrt{(-x)^2-4})}{e^{-2x}-e^{2x}} = \frac{\ln(\sqrt{x^2-4})}{-(e^{2x}-e^{-2x})} = -f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

3. Montrer que l'équation $e^{2x} + e^{-5x} = 3$ admet une solution sur $[0; +\infty[$.

Solution. Soit $f : x \mapsto e^{2x} + e^{-5x}$.

(i) La fonction f est bien définie et même continue sur $[0; +\infty[$.

(ii) De plus $f(0) = 2 < 3$ et $f(1) = e^2 + e^{-5} > e^2 > 2^2 = 4 > 3$. Donc $3 \in [f(0); f(1)]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; 1] \subseteq [0; +\infty[$ tel que $f(c) = 3$. Conclusion,

$$\boxed{\exists c \in [0; 1] \subseteq [0; +\infty[, \quad e^{2c} + e^{-5c} = 3.}$$

4. Déterminer le tableau de variations de $g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ sur son domaine de définition.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$g(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour la dérivabilité, on fait attention à cause de la racine carrée qui n'est pas dérivable sur son ensemble de définition. Soit $x > 0$. On a

$$g \text{ dérivable en } x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 (\text{pour le } \ln) \\ x > 0 (\text{pour la racine}) \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - \ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}} > 0 &\Leftrightarrow 2 - \ln(x) > 0 &\quad \text{car } 2x\sqrt{x} > 0 \\ &&&\Leftrightarrow 2 > \ln(x) \\ &&&\Leftrightarrow x < e^2. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant :

x	0	e^2	$+\infty$
g		1	

Or

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

Puis $g(e^2) = \frac{\ln(e^2)}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e} = 2e^{-1}$. Enfin, par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Conclusion,

x	0	e^2	$+\infty$
g	$-\infty$	$2e^{-1}$	0

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les dérivées n -ièmes de $H : x \mapsto xe^{2x}$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction H est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(x) &= xe^{2x} \\ H'(x) &= e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x + 1)e^{2x} \\ H''(x) &= 2e^{2x} + 2(2x + 1)e^{2x} = (4x + 4)e^{2x} \\ H^{(3)}(x) &= 4e^{2x} + 2(4x + 4)e^{2x} = (8x + 12)e^{2x} \\ H^{(4)}(x) &= 8e^{2x} + 2(8x + 12)e^{2x} = (16x + 32)e^{2x}. \end{aligned}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \forall x \in \mathbb{R}, H^{(n)}(x) = (2^n x + n2^{n-1}) e^{2x}. \gg$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2^0 x + 02^{0-1}) e^x = (2^0 x + 0) e^{2x} = x e^{2x} = H(x)$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H^{(n)}(x) = (2^n x + n2^{n-1}) e^{2x}.$$

En dérivant car $H^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad H^{(n+1)}(x) &= (H^{(n)})'(x) \\ &= 2^n e^x + 2(2^n x + n2^{n-1}) e^{2x} \\ &= (2^n + 2^{n+1}x + n2^n) e^{2x} \\ &= (2^{n+1}x + (n+1)2^n) e^{2x}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H^{(n)}(x) = (2^n x + n2^{n-1}) e^{2x}.$$